ORSAY
N° d'ordre : 3203

THESE

PRESENTEE

A L'UNIVERSITE DE PARIS-SUD
CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR 3ème CYCLE
Spécialité : ELECTRONIQUE

par

Mohamed TEILAB

DETERMINATION DU TEMPS DE REPONSE D'UN CAPTEUR DE TEMPERATURE
(par modèle mathématique)

Soutenue le 7 mai 1982, devant la Commission d'Examen

MM. DEBRAINE Président

BONNEMAY
DONADIEU
POUJOL

ORSAY
N° d'ordre : 3203

THESE

PRESENTEE

A L'UNIVERSITE DE PARIS-SUD
CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR 3ème CYCLE
Spécialité : ELECTRONIQUE

par

Mohamed TEILAB

DETERMINATION DU TEMPS DE REPONSE D'UN CAPTEUR DE TEMPERATURE
(par modèle mathématique)

Soutenue le 7 mai 1982, devant la Commission d'Examen

MM. DEBRAINE Président

BONNEMAY
DONADIEU
POUJOL

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Je désire exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur le professeur DEBRAINE qui a accepté de diriger ce travail et dont les remarques et suggestions m'ont été d'une grande utilité. Je le remercie aussi d'avoir bien voulu présider le jury de cette thèse.

Mes remerciements vont également à Monsieur ZWINGELSTEIN qui m'a donné le sujet de cette thèse,Monsieur BONNEMAY et Monsieur DONADIEU membres du jury et specialement à Monsieur POUJOL qui m'a communiqué les resultats d'experiences faites à SACLAY,à l'E.D.F et aux U.S.A

Merci aussi à Madame TALLEC qui m'a aidé à corriger les fautes de français, à Monsieur EDELINE pour son encouragement et la sympathie qu'il m'a témoignée, et au groupe de Monsieur POUJOL pour son aide amicale.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

CHAPITRE 1 : DESCRIPTION DU CAPTEUR

CHAPITRE 2 : INSTRUMENTATION D'UNE SONDE A RESISTANCE THERMOMETRIQUE

CHAPITRE 3 : LES AUTRES METHODES POUR LE TEMPS DE REPONSE

3.1 - Le test de plongée

3.1.1 - Le récipient tournant

3.1.2 - Le circuit de mesure

3.1.3 - Les étapes du test de plongée

3.2 - Méthode de la boucle de courant

3.2.1 - La boucle de courant technique

3.3 - Méthode de l'auto-échauffement (Self-heating)

3.3.1 - La théorie et le principe de la méthode d'auto-échauffement

3.3.2 - Développement d'une transformation expérimentale

3.4 - Méthode de l'analyse de bruit

3.4.1 - Modèle autorégressif

3.4.2 - Estimation des paramètres du module (AR)

3.4.3 - Estimation de l'ordre optimal du module (AR)

CHAPITRE 4 :

4.1 - Modèle mathématique

4.2 - L'erreur de troncature

4.3 - La convergence

4.4 - La stabilité

CHAPITRE 5 :

5.1 - Discrétisation

5.2 - La programmation

RESULTATS

CONCLUSION

DESCRIPTION DE L'ORDINATEUR

LE PROGRAMME

BIBLIOGRAPHIE

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543523_0042

DETERMINATION DU TEMPS DE REPONSE D'UN CAPTEUR DE TEMPERATURE (par modèle mathématique)

INTRODUCTION

Le temps de réponse d'un capteur à résistance de platine est défini par le temps qui s'écoule lorsqu'il est soumis à un échelon de température avant que la résistance de platine atteigne 63.2 % de la différence entre la température initiale et la température finale. La connaissance de ce temps est très importante pour la sécurité des réacteurs nucléaires. Ces capteurs font partie des chaines de protection du réacteur nucléaire. Ces chaines doivent avoir un temps de réponse global suffisamment court pour permettre la détection et la correction de toute anomalie de fonctionnement du réacteur.

A l'heure actuelle, plusieurs types de méthodes expérimentales permettent de déterminer le temps de réponse d'un capteur à résistance de platine. Ces méthodes ont toutes leurs inconvénients spécifiques :

- le capteur doit être démonté de l'installation et une barre d'essai doit être disponible (test de plongée)
- le capteur doit être déconnecté de la chaine de protection et un appareillage d'injection et de mesure de courant est indispensable (boucle de courant auto-échauffement)
- des hypothèses restrictives sur la nature des fluctuations naturelles du signal délivré par le capteur sont faites. (méthodes d'analyse et de bruit).

De plus, elle ne prennent pas en considération un paramètre très important, ce paramètre est le coefficient de diffusivité car les expériences sont faites en température ambiante de 20°C alors que la température du réacteur est environ de 280°C, le coefficient de diffusivité de l'oxyde de magnésium est de l'ordre de 0.175 cm^2/s pour une température de 20°C et de l'ordre de 0.06 cm/s pour une température de 280°C.

Le but de cette étude est de déterminer un modèle mathématique du fonctionnement d'un capteur à résistance de platine

et de le valider par rapport aux résultats obtenus par les méthodes expérimentales.

Ceci permet une meilleure connaissance du fonctionnement physique du capteur et il sera donc possible de simuler l'influence de divers paramètres de la constitution du capteur sur le temps de réponse sans avoir à construire les capteurs correspondant aux valeurs des paramètres que l'on fait varier. Le modèle sera de plus valable pour tous les capteurs du même type.

Ce modèle est basé sur les caractéristiques physiques des composants du capteur et exploite la définition de la chaleur spécifique pour obtenir le système d'équation aux dérivées partielles qui gouverne la propagation de la chaleur :

$$\frac{\partial U(r,z,t)}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(K(r,z)\,\frac{\partial U(r,z,t)\,r}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K(r,z)\frac{\partial U(r,z,t)}{\partial z}\right)$$

$$U(r,z;0) = U_0$$
$$U(R,z,t) = U_1$$
$$U(r,0,t) = U_1$$

où $U(r,z,t)$ est la température au point r,z, et au temps t, U_o est la température initiale et U_1 la température à la surface du capteur.

Le système aux dérivées partielles est remplacé par un système aux différences qui utilise un nombre fini de terme, ce qui introduit une erreur de troncature. On calcule cette erreur de troncature et également on calcule le pas de temps et le pas d'espace et la relation entre eux pour que la solution numérique converge vers la solution exacte, et soit stable avec le temps c'est-à-dire que l'erreur de troncature reste bornée (l'erreur de troncature de la machine est négligée car la machine donne sept chiffres corrects, et le constructeur du capteur prévoit une marge de $\pm$ 0,05 °C).

Ce système est intégré numériquement sur un mini calculateur (SOLAR 16/65) afin de déterminer le temps de réponse du capteur et de faire une étude théorique sur influence de différents paramètres, comme le changement de la température ambiante c'est-à-dire le changement de coefficient de diffusivité le chan-

gement de diamètre du capteur et le changement de la hauteur de l'élément sensible. Les résultats obtenus sont comparés avec des résultats obtenus par les méthodes expérimentales.

On constate que pour la température ambiante de 20°C, le résultat obtenu par le modèle mathématique est dans la fourchette de résultats donnés par ces autres méthodes. Le modèle permet de prédire le temps de réponse du capteur sur un réacteur nucléaire en mettant dans le modèle le coefficient de diffusivité correspondant à la température ambiante de réacteur.

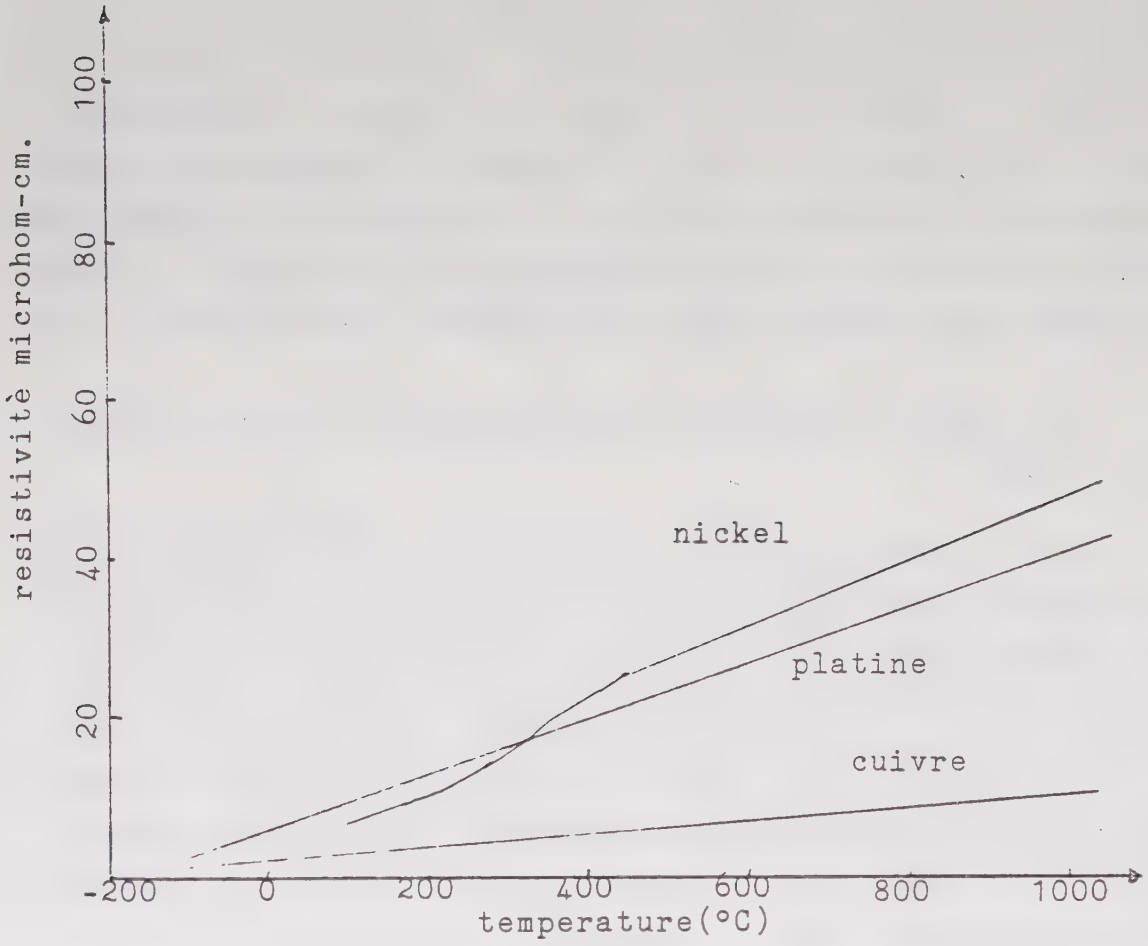
CHAPITRE 1

DESCRIPTION DU CAPTEUR

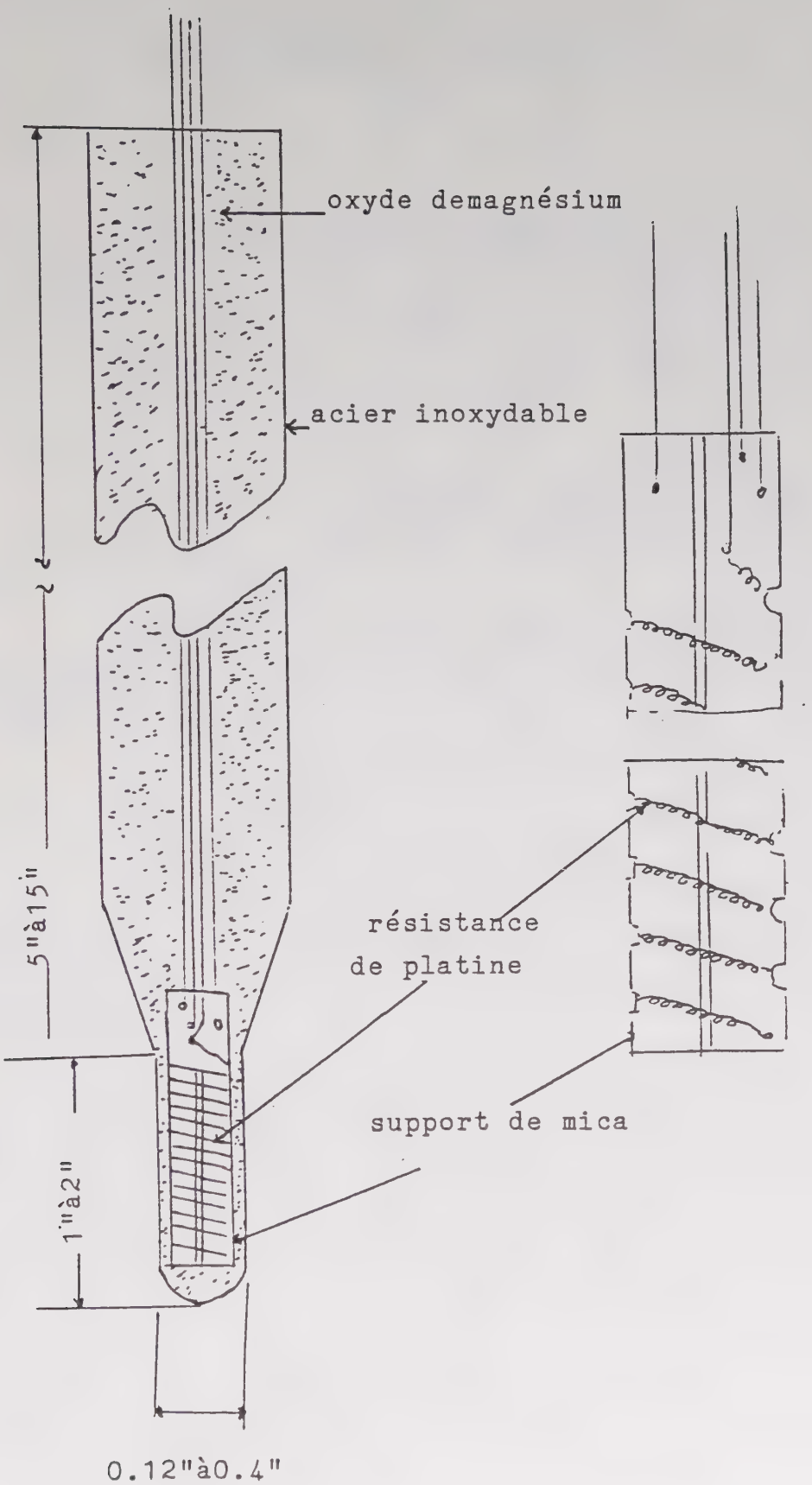
Un capteur à résistance de platine est composé d'une enveloppe cylindrique en acier inoxydable. C'est la gaine protectrice contre les chocs et la corrosion. L'enveloppe contient une croix de mica au centre. Sur la croix est bobinée la résistance de platine ; son axe est l'axe du capteur. Le capteur est rempli par une poudre d'oxyde de magnésium : la poudre est utilisée comme isolant électrique et comme conducteur de la chaleur la (figure 1.2) donne une configuration d'un capteur à résistance de platine.

La figure (1.3) donne le support de la résistance de platine en mica.

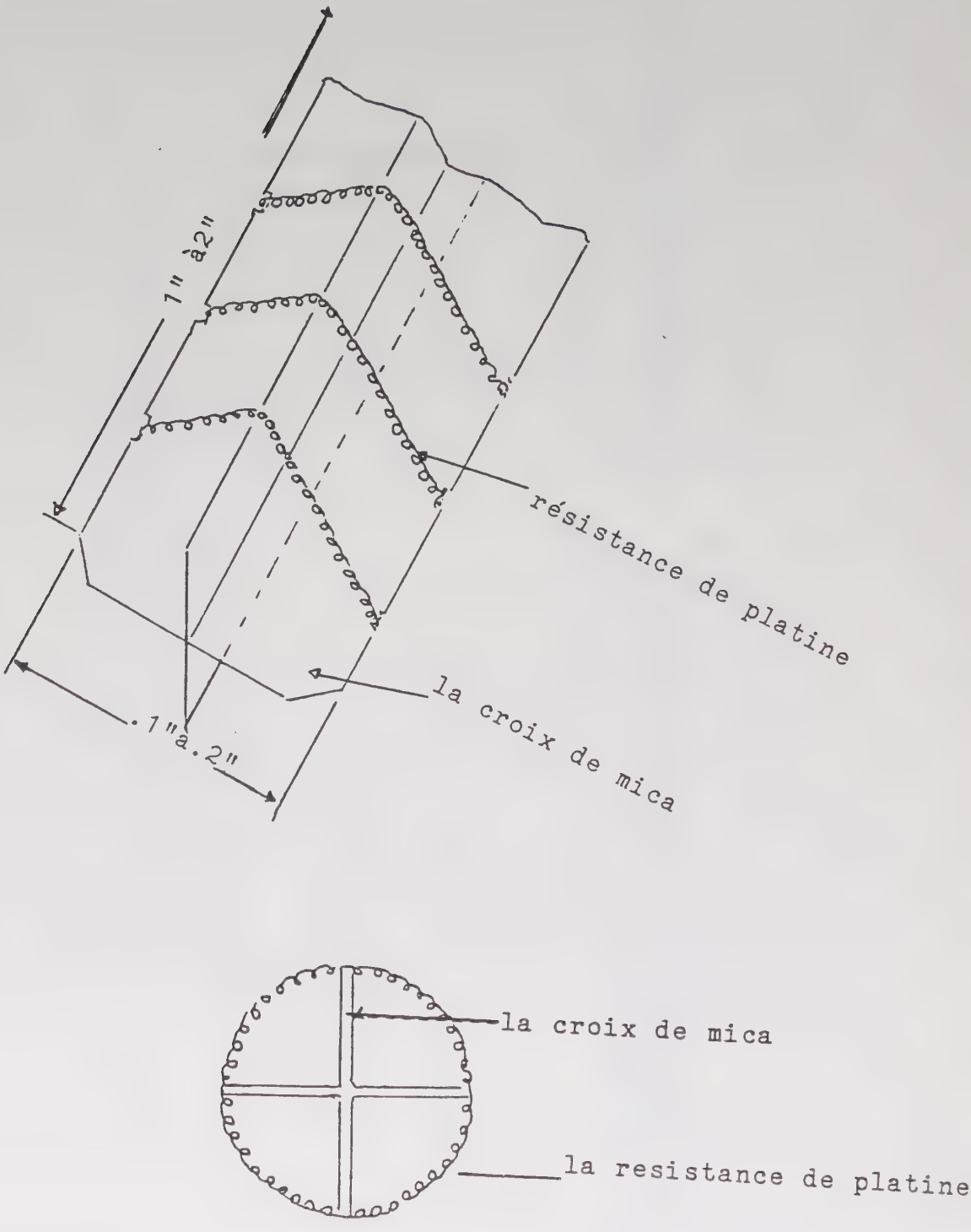
Il y a trois types de résistances : résistance de platine, résistance de nickel, résistance de cuivre. Le choix du platine est justifié par le fait que la relation entre la résistivité et la température est linéaire dans une large gamme et le coefficient de proportionnalité est grand, la platine résiste mieux que le cuivre et le nickel aux contaminations par d'autres matières et ses caractéristiques physiques restent inchangées. La figure (1.1) donne les courbes de relation entre la température et la résistance pour le platine, le nickel et le cuivre.



figure(1.1) Changement de la résistance en fonction de la température



figure(1.2) configuration d'un capteur à résistance de platine



figure(1.3) le support de résistance de platine

CHAPITRE 2

INSTRUMENTATION D'UNE SONDE A RESISTANCE THERMOMETRIQUE (SRT)

L'instrumentation utilisée pour mesurer la résistance d'un capteur est normalement (un pont de WHEATSTONE). La figure (2.1) donne un circuit typique d'un pont de Wheatstone. Il y a plusieurs méthodes pour connecter les bornes de la résistance du capteur. Toutes ces méthodes sont basées sur le même principe de (circuit en pont de Wheatstone).

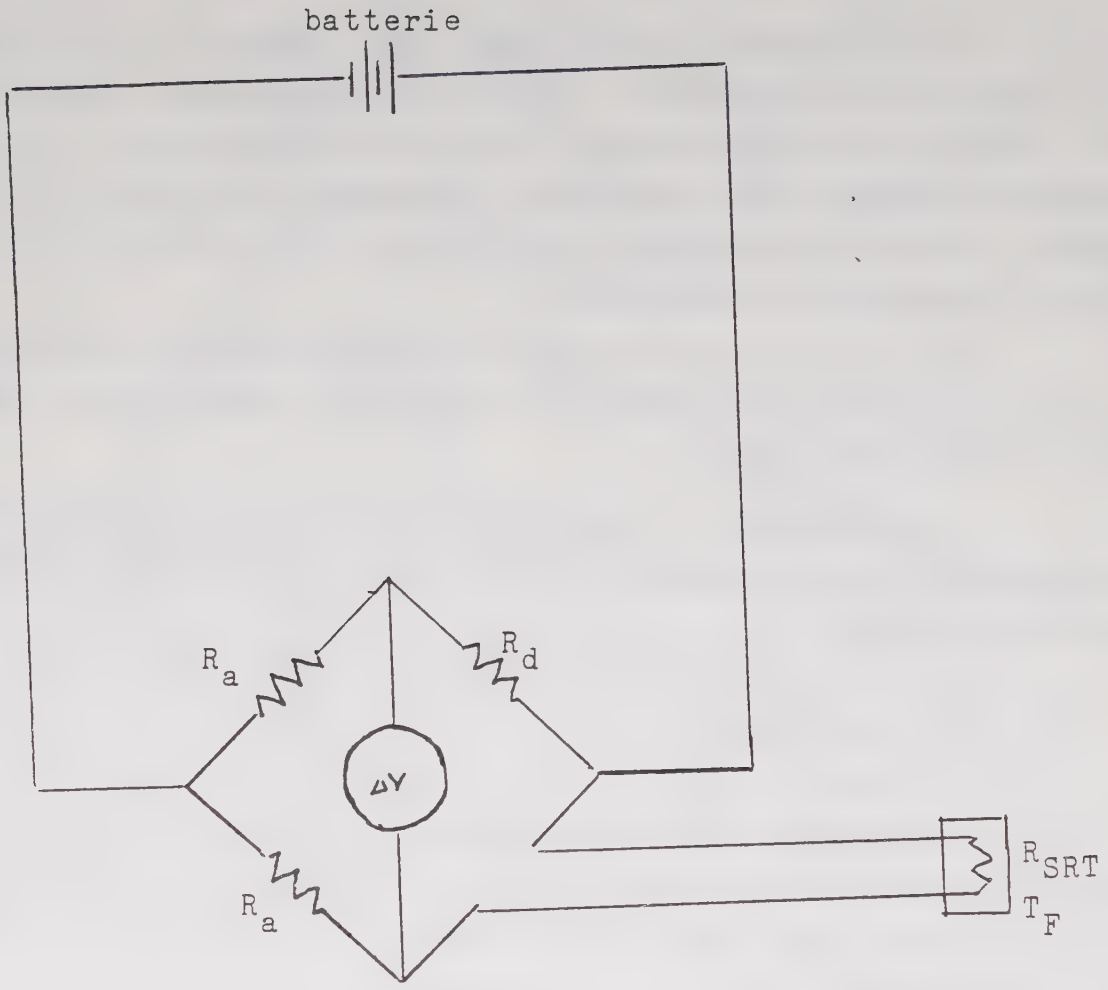
Si les deux résistances fixes ont la même valeur R_a la résistance SRT est égale à la résistance variable qui rend la tension nulle dans le pont.

Si on utilise le pont pour une tension non nulle le changement de la résistance SRT est lié à la différence de tension dans le pont par

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{(R_d - R_{SRT})R_a}{(R_a+R_d)(R_a+R_{SRT})}$$

On constate que la différence de tension est presque linéaire avec la résistance SRT, si le changement de la résistance SRT est petit par rapport à la somme de la résistance SRT et de la résistance fixe R_a.

La tension E utilisée dans une application normale est choisie pour que l'échauffement (l'effet Joule) soit négligeable. L'effet thermo-électrique est quantifié par un thermo-coefficient exprimé en ohms.mwA. Une valeur typique est 8×10^{-3} ohm/mw. Pour un capteur de 100 ohm avec un courant de 2 mA, la chaleur produite est 0.4 mw. Cette chaleur donne un changement de la résistance de 3.2×10^{-3} C°. Ce changement donne une erreur de 8.15×10^{-3} C°. Le même calcul pour un courant de 50 mA donne une température de 5.62 C°.



figure(2.1) Circuit typique utilisé avec SRT

CHAPITRE 3

LES AUTRES METHODES POUR DETERMINER LE TEMPS DE REPONSE

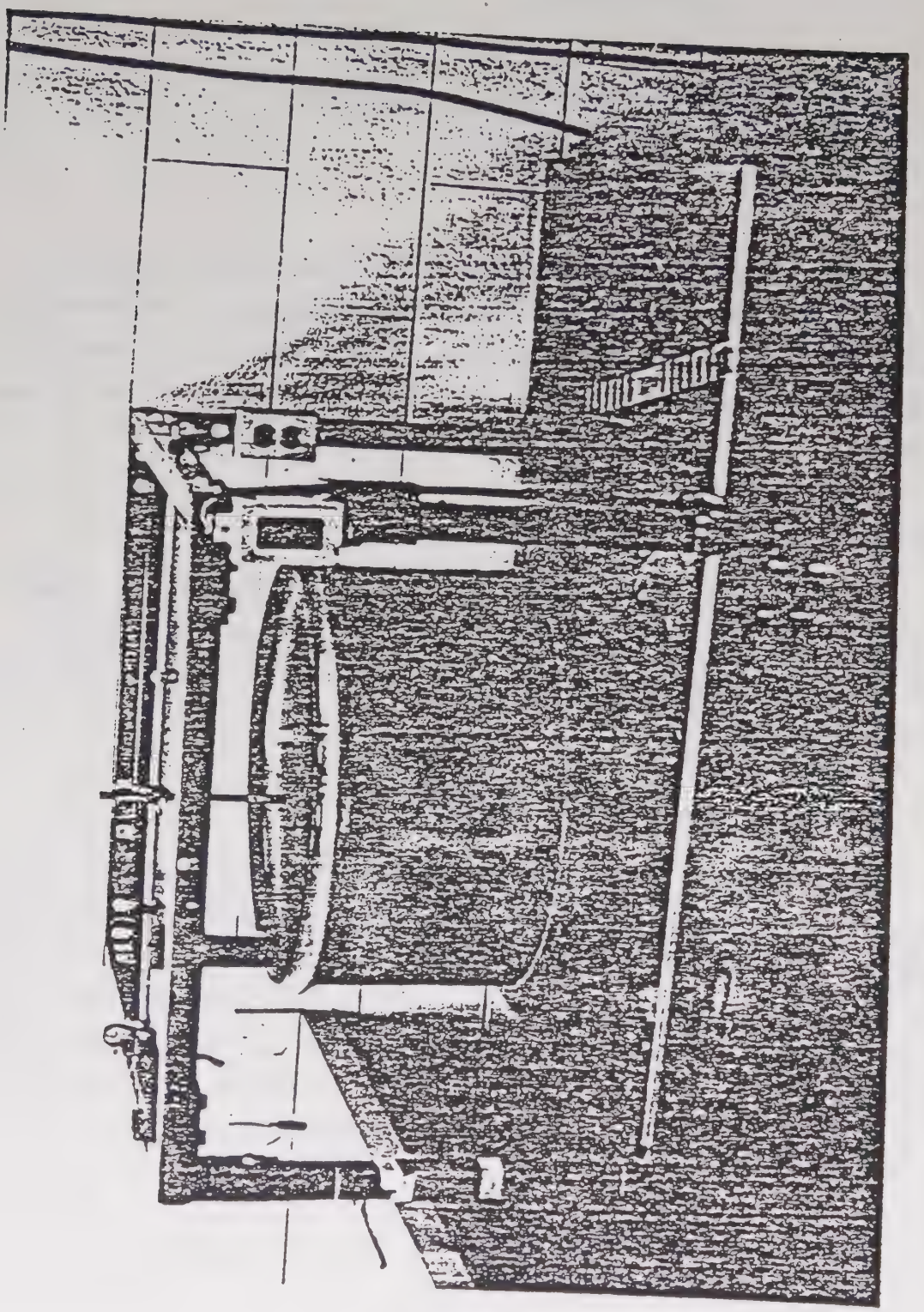
On va rappeler le principe et la technique d'autres méthodes qui sont déjà utilisées pour déterminer le temps de réponse comme : Test de plongée, méthode de la boucle de courant, méthode de l'auto-échauffement (self heating), méthode de l'analyse de bruit.

3.1 - TEST DE PLONGEE

La réalisation de test de plongée nécessite un récipient tournant, un circuit de mesure de la réponse de capteur constitué essentiellement d'un pont de Wheastone et un circuit de mesure du temps.

3.1 - Le récipient tournant

Le récipient tournant est constitué d'un tambour de diamètre égal 55,88 cm (22 inches) et de hauteur égale 33,02 cm (13 inches), le tambour est rempli d'eau à la température ambiante jusqu'à 22.86 cm (9 inches). La rotation du tambour est assurée par un moteur à vitesse constante ; mais la vitesse de l'eau varie de zéro au centre à 121,92 cm/sec. (4f/sec) au bord. La figure (3.1) est une photo du récipient tournant.

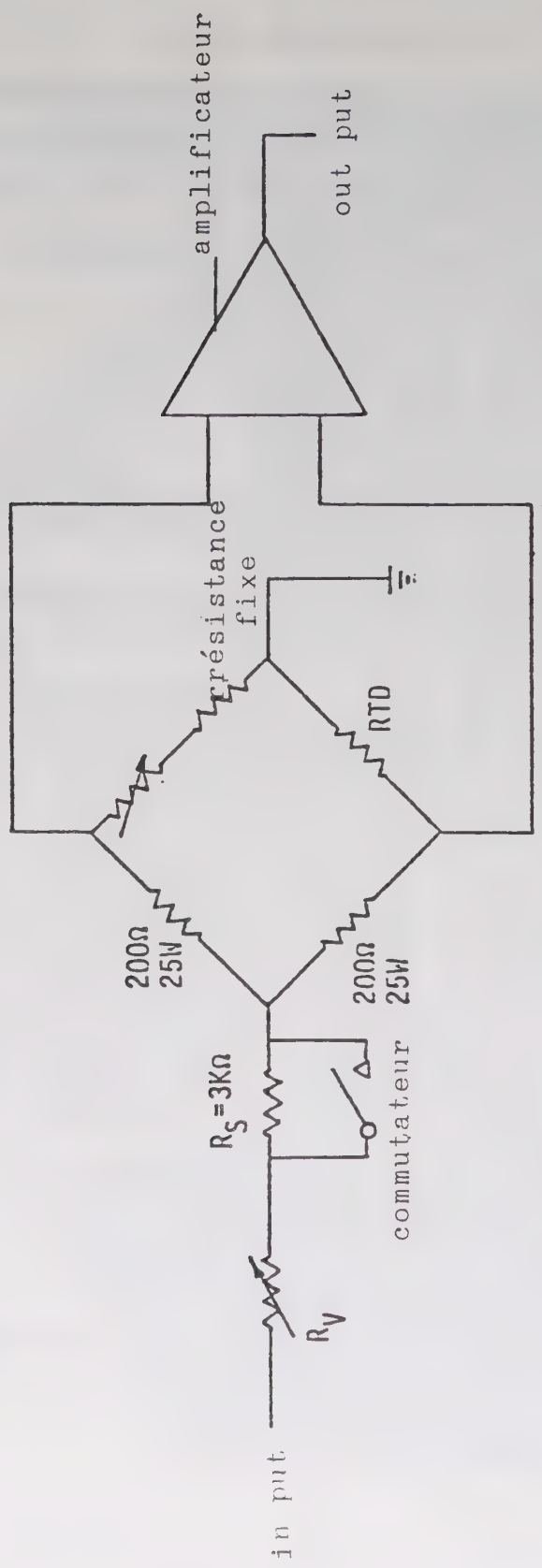


figure(3.1) le récipient tournant

3.1.2 - Le circuit de mesure

Le circuit de mesure est constitué d'un pont de Wheatstone. Le débit du circuit est amplifié par un amplificateur différentiel. Il y a aussi un potentiomètre pour équilibrer le pont.

La figure (3.2.) donne le schéma de ce circuit.



figure(3.2) Circuit de mesure le temps du reponse

3.1.3 - La réalisation de test de plongée

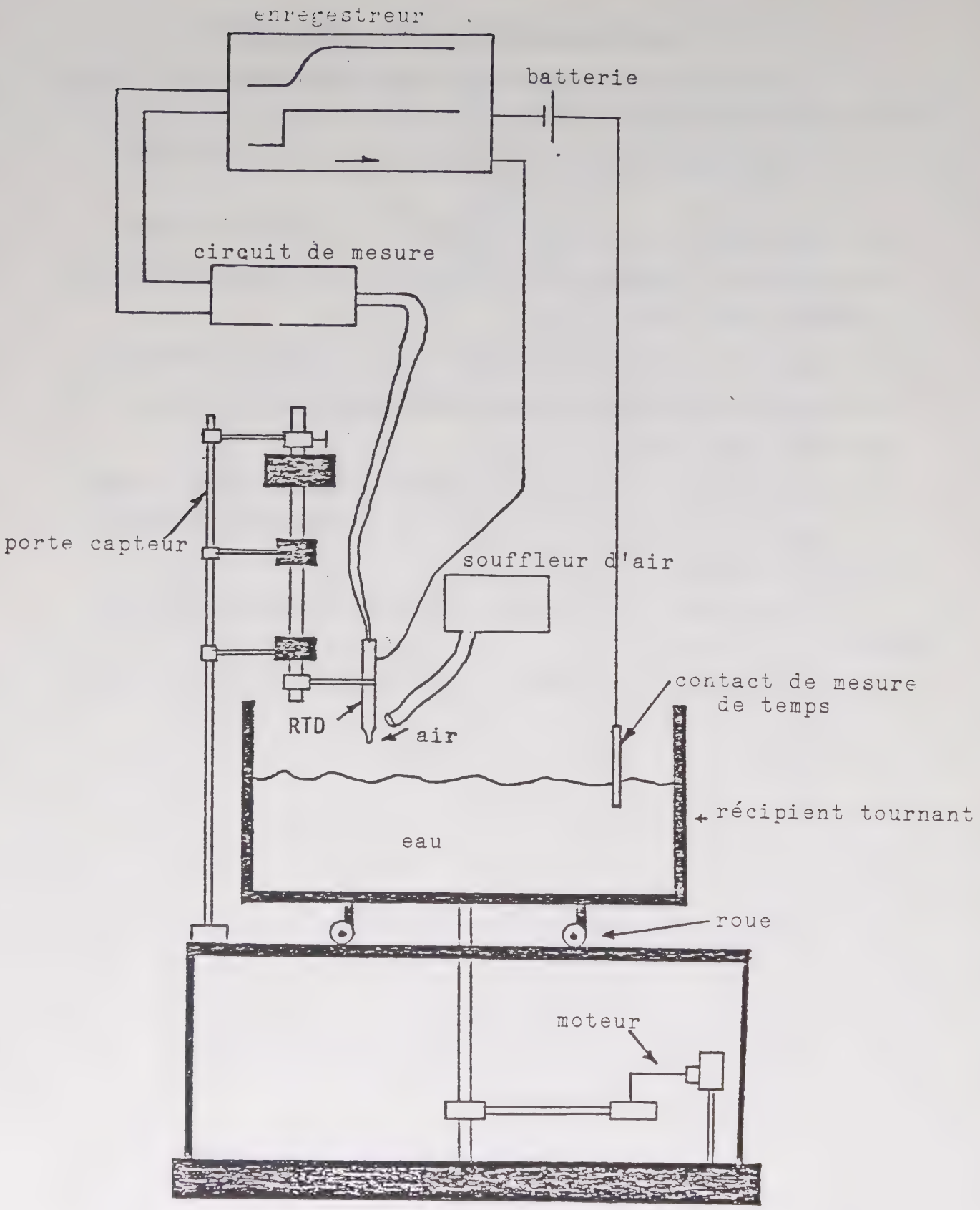
La figure (3.3) donne une vue horizontale de l'ensemble de test de plongée.

Les étapes de test de plongée sont les suivantes

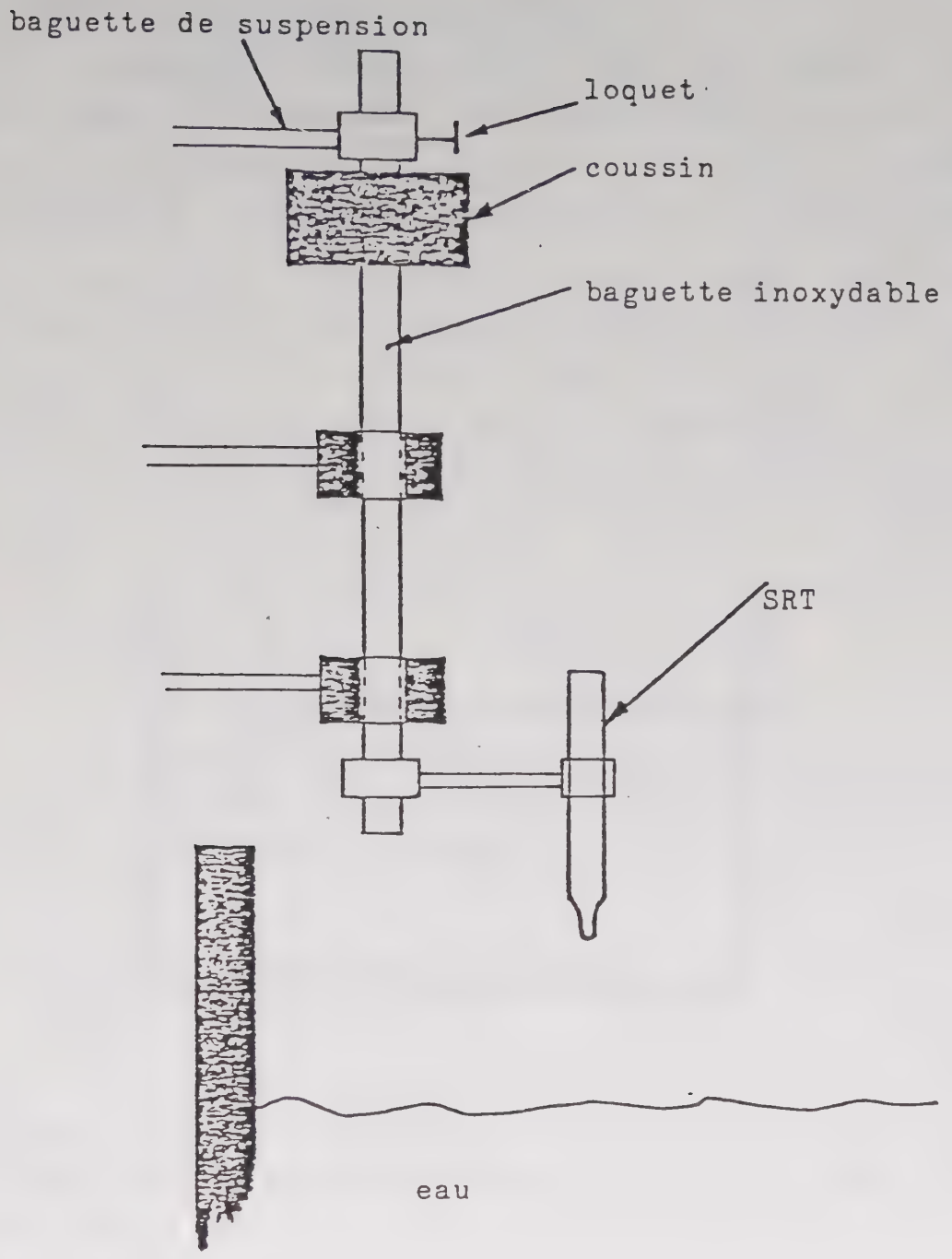
1. on fait tourner le tambour jusqu'à la vitesse désirée
2. On chauffe le capteur par soufflage d'air chaud avant de le plonger dans l'eau
3. on lache le capteur qui descend par la force de gravité
4. le circuit de mesure du temps est lancé par le contact du capteur avec l'eau
5. on enregistre la réponse du capteur avec le temps lorsque la température atteint 63.2 % de la température finale le temps de réponse est obtenu.

La figure (3.4) donne l'ensemble de suspension du capteur.

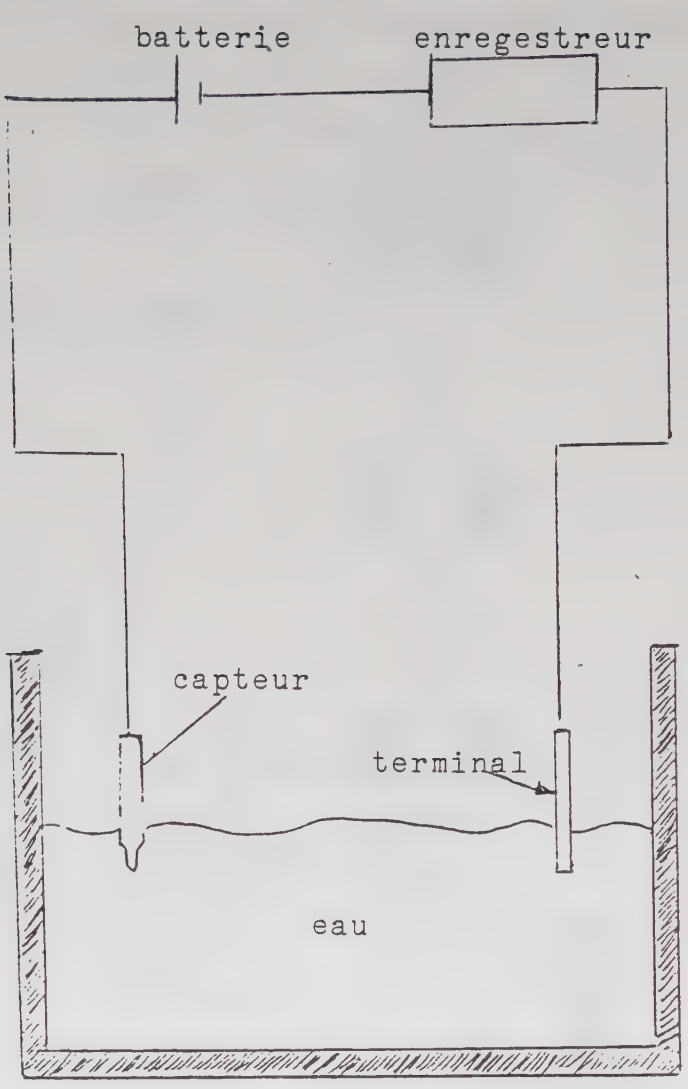
La figure (3.5) donne le circuit de mesure de temps.



figure(3.3) Ensemble de test de plongée



figure(3.4) Ensemble de suspension du capteur



figure(3.5) le circuit de mesure du temps

3.2 - METHODE DE LA BOUCLE DE COURANT

Pendant le fonctionnement normal d'un capteur, le courant qui passe dans l'élément sensible est de l'ordre de 1-5 mA.

Le changement de température du liquide est déterminé par la mesure du changement de résistance de l'élément sensible.

Le test de la boucle de courant est fait pour changer le courant qui passe dans l'élément sensible de sa petite valeur de l'ordre de 1-5 mA à une grande valeur de l'ordre de 20-60 mA. Par l'effet Joule ce courant augmente la température de l'élément sensible de quelques degrés au-dessus de la température ambiante. Quand l'équilibre est atteint, c'est-à-dire quand la température de l'élément sensible reste inchangée, on revient à la valeur originale du courant et on mesure la résistance de l'élément sensible en fonction du temps.

3.2.1 - La boucle de courant technique

On commence la boucle de courant test par faire un équilibre du pont pour le petit courant initial donc $R_d = R_{SRT}$ la tension initiale est donnée par

$$\Delta V = \left(\frac{(R_d - R_{SRT})\,R_a}{(R_a+R_d)(R_a+R_{SRT})}\right) \quad E_0=0$$

O représente la condition initiale quand le petit courant passe. On augmente le courant par un échelon de l'ordre de (20-60 mA), on a un changement exponentiel de la tension en fonction du temps : quand on atteint l'équilibre on a

$$\Delta V \simeq C \Delta R_{SRT} E_N$$

ou $C = \dfrac{R_a}{(R_a+R_d)(R_a+R_{SRT})}$ est considéré comme constant

ΔV = variation de V

E_N = différence de tension dans le pont

Quand E_N est revenu à sa valeur originale E_o, ΔV décroit exponentiellement en fonction du temps.

Il y a deux méthodes pour obtenir, à partir des résultats de la boucle de courant, le temps de réponse.

La première est analytique ; il y a beaucoup de réserves à faire à l'égard de cette méthode. Premièrement elle considère que le transfert de chaleur est fait dans une seule dimension, ce n'est pas tout à fait vrai. Deuxièmement, elle suppose que l'élément sensible est au centre du capteur, ce n'est pas le cas par exemple dans le système Westinghouse /18/ l'élément sensible n'est pas au centre du capteur. Troisièmement si on n'arrive pas à déterminer les valeurs propres de la matrice de transformation, on obtient un faux résultat.

La deuxième méthode est expérimentale pour déterminer la relation entre le temps de réponse du changement de température du liquide et le temps de réponse de la boucle de courant test.

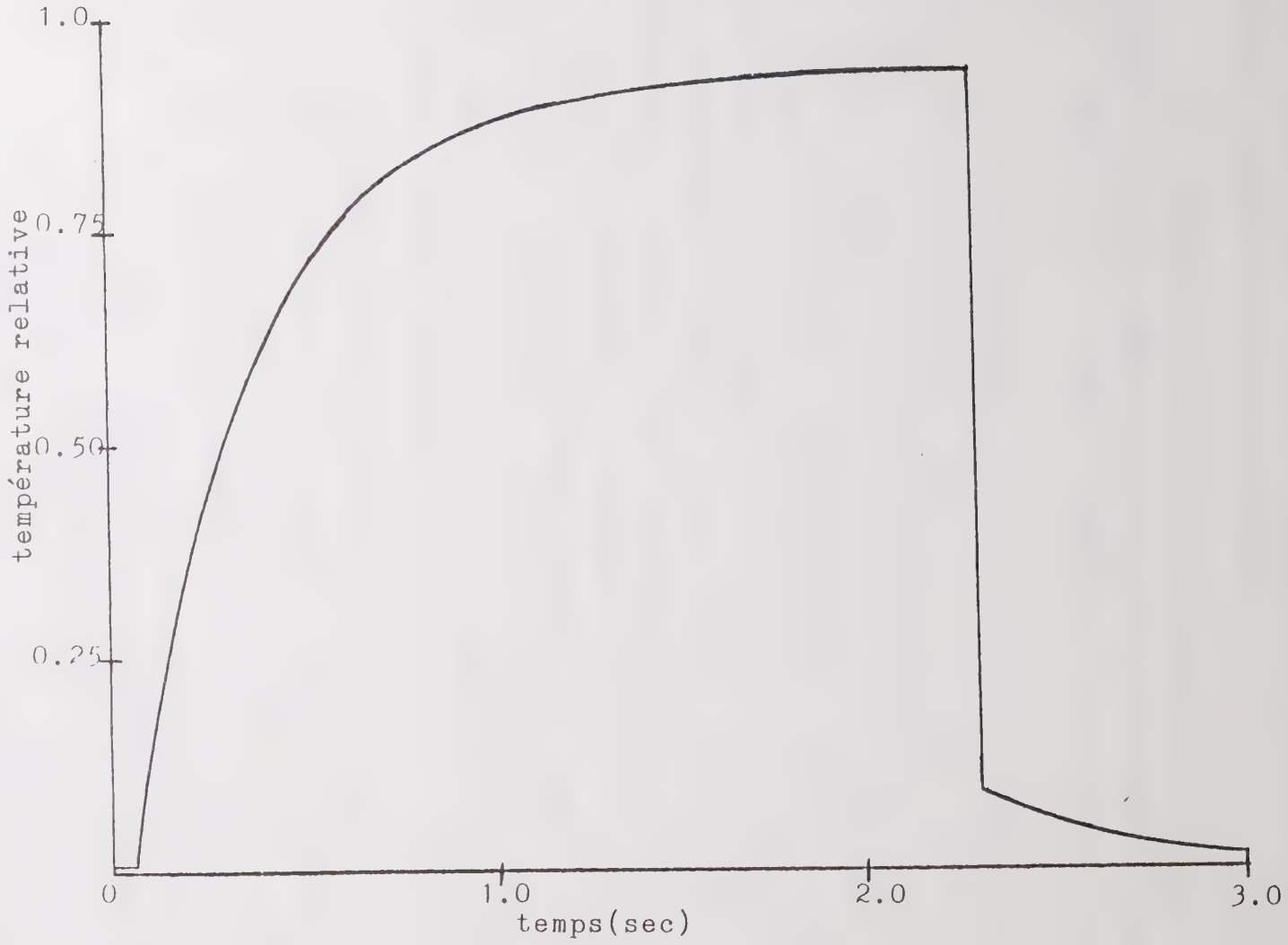
Le temps constant (temps de réponse) de la boucle de courant test $T_{B.C}$ est défini comme étant le temps mis par la résistance du capteur pour atteindre 63.2 % de sa valeur finale en réponse à un échelon de courant dans l'élément sensible. Le temps de réponse du test de plongée est défini par le temps qui s'écoule avant que la résistance de platine atteigne 63.2 % de la différence entre la température initiale et la température finale. Normalement le temps de réponse dépend de la qualité du transfert de la chaleur et des caractéristiques de l'environnement ; quand la résistance de transfert augmente, le temps de réponse croît et quand la résistance diminue, le temps de réponse décroît, il est possible de modifier artificiellement le changement du transfert de la chaleur en ajoutant un isolement d'épaisseur variable autour du capteur.

Pour développer la courbe expérimentale de correlation entre le test de plongée et le test de la boucle de courant, le test de plongée et le test de la boucle de courant sont répétés pour plusieurs simulations d'environnement avec transfert de la chaleur. Chaque fois le temps de réponse est mesuré, on a un point de la courbe expérimentale et quand on dessine tous les points on a une courbe expérimentale de corrélation.

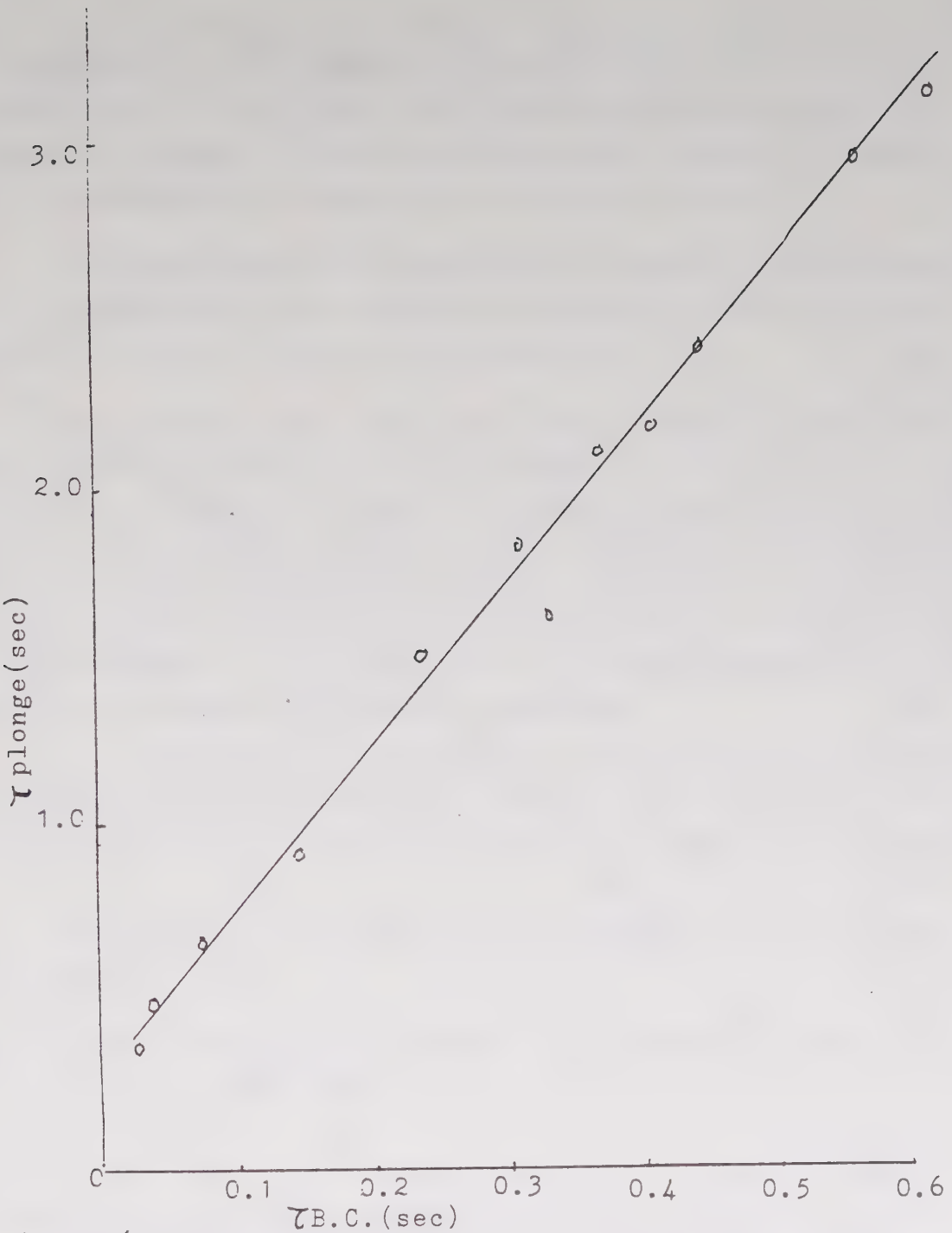
D'après cette courbe on peut prédire le changement dans la température du liquide.

La figure (3.6) donne la réponse d'un capteur testé par le test de la boucle de courant.

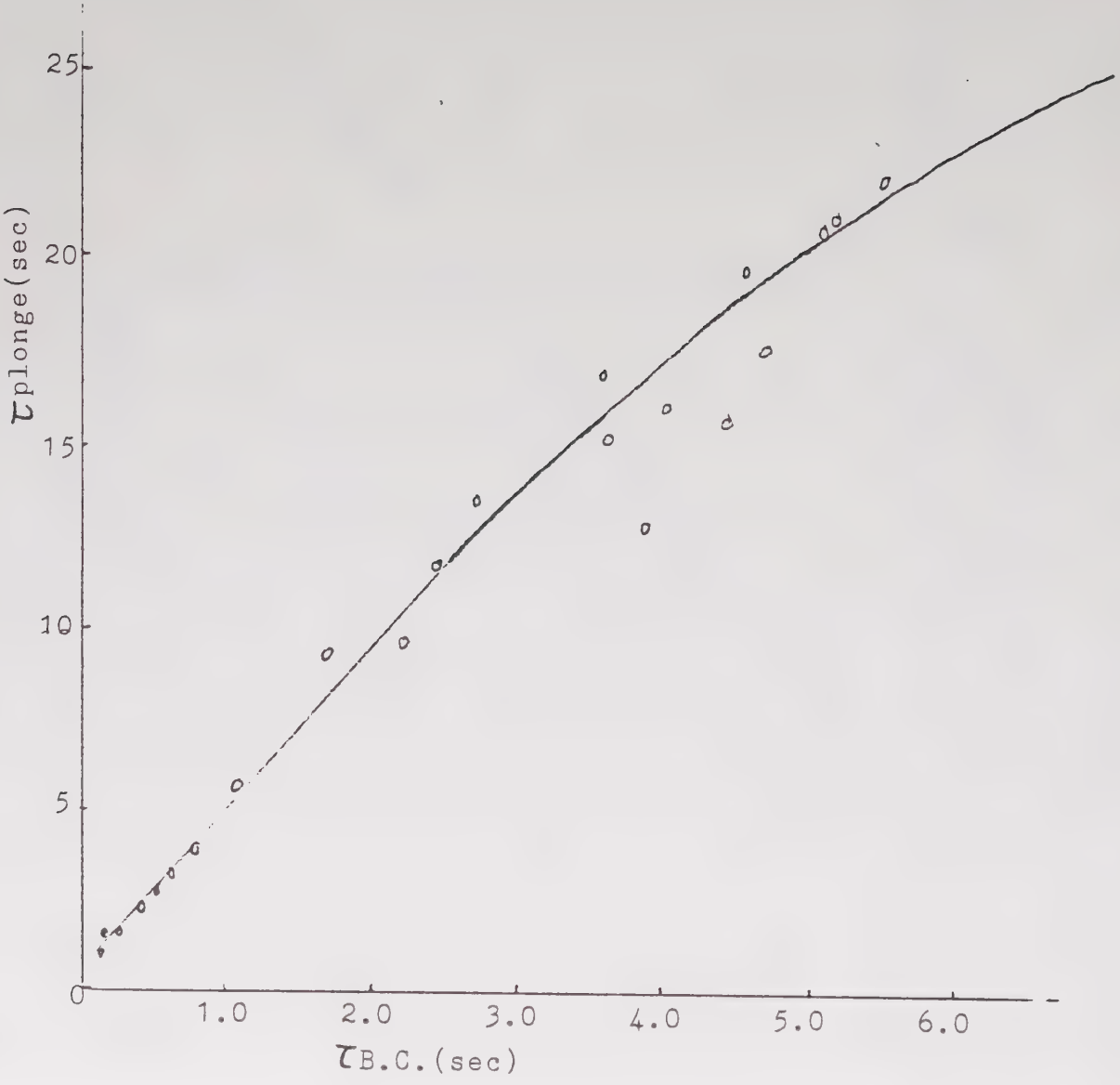
Les figures 3.7 et 3.8 donnent les courbes de correlation pour le capteur 176.KF.



figure(3.6) Réponse du capteur par la boucle de courant



figure(3.7) Corrélation expérimentale entre le test de plongée(plonge) et le test de la boucle de courant(B.C) pour 176_KF



figure(3.8) Corrélation expérimentale entre le test de plongée(plonge) et le test de la boucle de courant(B.C) pour 176_KF

3.3 - METHODE DE L'AUTO-ECHAUFFEMENT (SELF-HEATING)

Le test d'auto-échauffement exploite la dépendance entre la température du capteur augmentée par effet Joule dans le fil de platine à l'équilibre et le coefficient de transfert de la chaleur au liquide. Cette dépendance rend possible la détection d'un changement de température autour du capteur.

L'augmentation de température du capteur est une fonction de la génération de la chaleur et du pouvoir du capteur de disperser la chaleur dans son environnement.

Le courant normal qui passe dans l'élément sensible du capteur est de l'ordre de (1-5 mA). Pendant le test d'auto-échauffement, le courant augmente par échelons successifs jusqu'à atteindre de l'ordre de (20-100 mA). La résistance électrique de l'élément sensible est mesurée à chaque échelon et la quantité de chaleur produite est calculée. Le résultat est une courbe montrant le changement de la résistance de l'élément sensible en fonction de la quantité de chaleur produite.

Le changement de résistance est proportionnel au changement de température de l'élément sensible pour un capteur à résistance de platine. La courbe d'auto-échauffement est linéaire.

La figure 3.9. représente la courbe d'auto-échauffement du capteur 176-KF.

3.3.1 - Théorie et principe de la méthode d'auto-échauffement

On utilise le Pont de Wheatstone dans le circuit de mesure de la résistance de l'élément sensible. Le courant normal qui passe dans le pont est de l'ordre de (1-5 mA). On fait l'équilibre du circuit pour ce petit courant. On augmente le courant par échelons successifs jusqu'à l'ordre de (20-100 mA).

Le transfert à l'auto-équilibre est défini par

$$Q = U A (T - \Theta)$$

Q = Quantité de chaleur produite

U = Coefficient de transfert de chaleur

A = Surface du capteur

T = Température du capteur

Θ = Température du liquide

Si on considère Θ constante et que la température du capteur est augmentée en ΔT de la quantité de chaleur ΔQ on a on a

$$\Delta T = \frac{\Delta Q}{UA}$$

car la résistance est proportionnelle à la température

$$\frac{1}{UA} \propto \frac{\Delta R}{\Delta Q}$$

donc pour dessiner la courbe de l'auto-échauffement on calcule à chaque échelon la quantité $I^2 R$ et on dessine la courbe $\Delta R = f(\Delta Q)$. La figure (3.1) représente la courbe de l'auto-échauffement pour le capteur 176-KF.

La pente de cette courbe est proportionnelle à $\frac{1}{UA}$

Le temps de réponse est proportionnel à la capacité calorifique du capteur et inversément proportionnel à UA. Si on considère que la capacité calorifique reste constante, le temps de réponse τ est lié à la pente de la courbe d'auto-échauffement

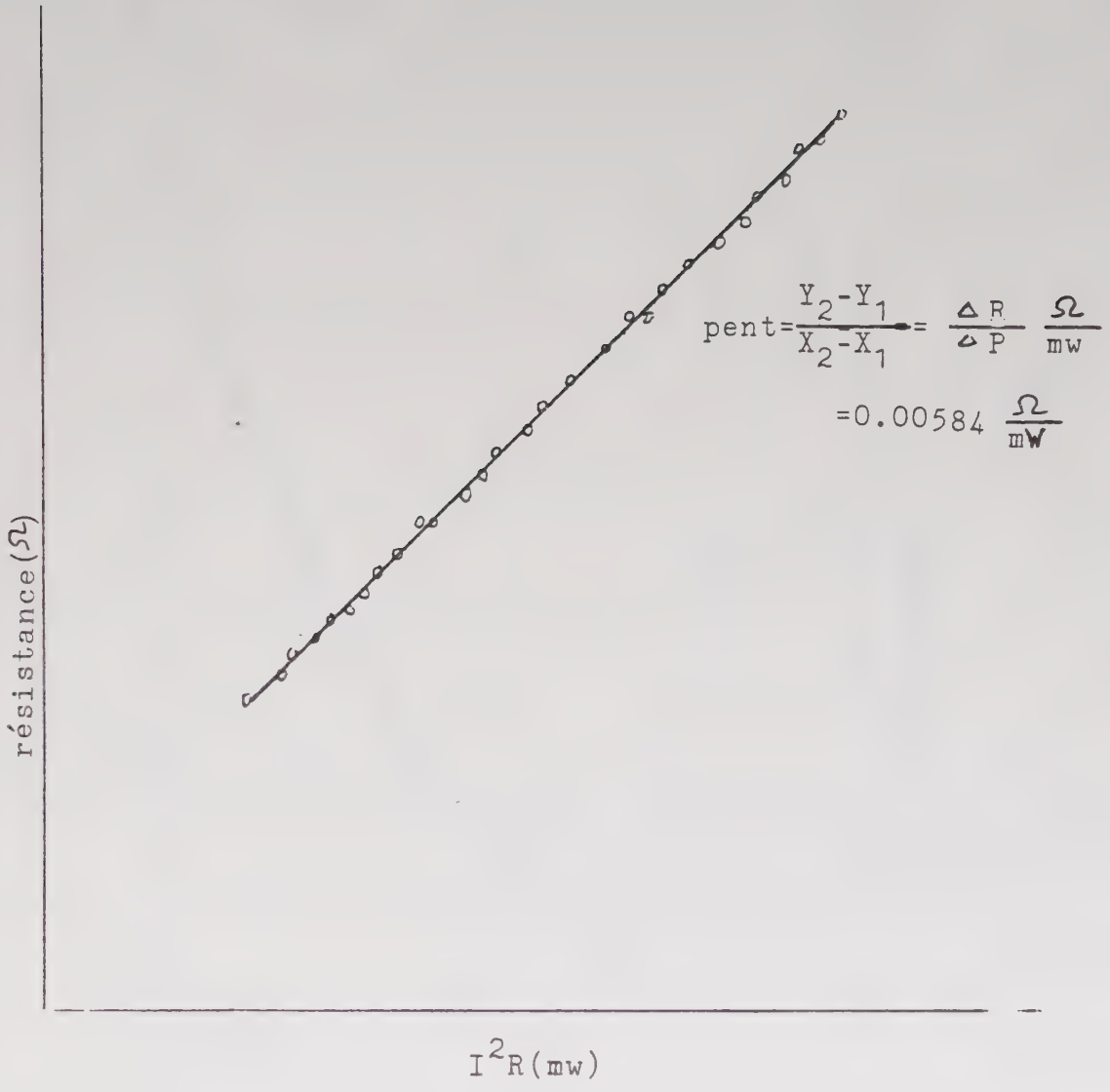
$$\tau \propto \frac{\Delta R}{\Delta Q}$$

donc le temps de réponse est déduit de la mesure de la pente de la courbe d'auto-échauffement et du point correspondant à cette pente sur la courbe de correlation, figure (3.10) et (3.11).

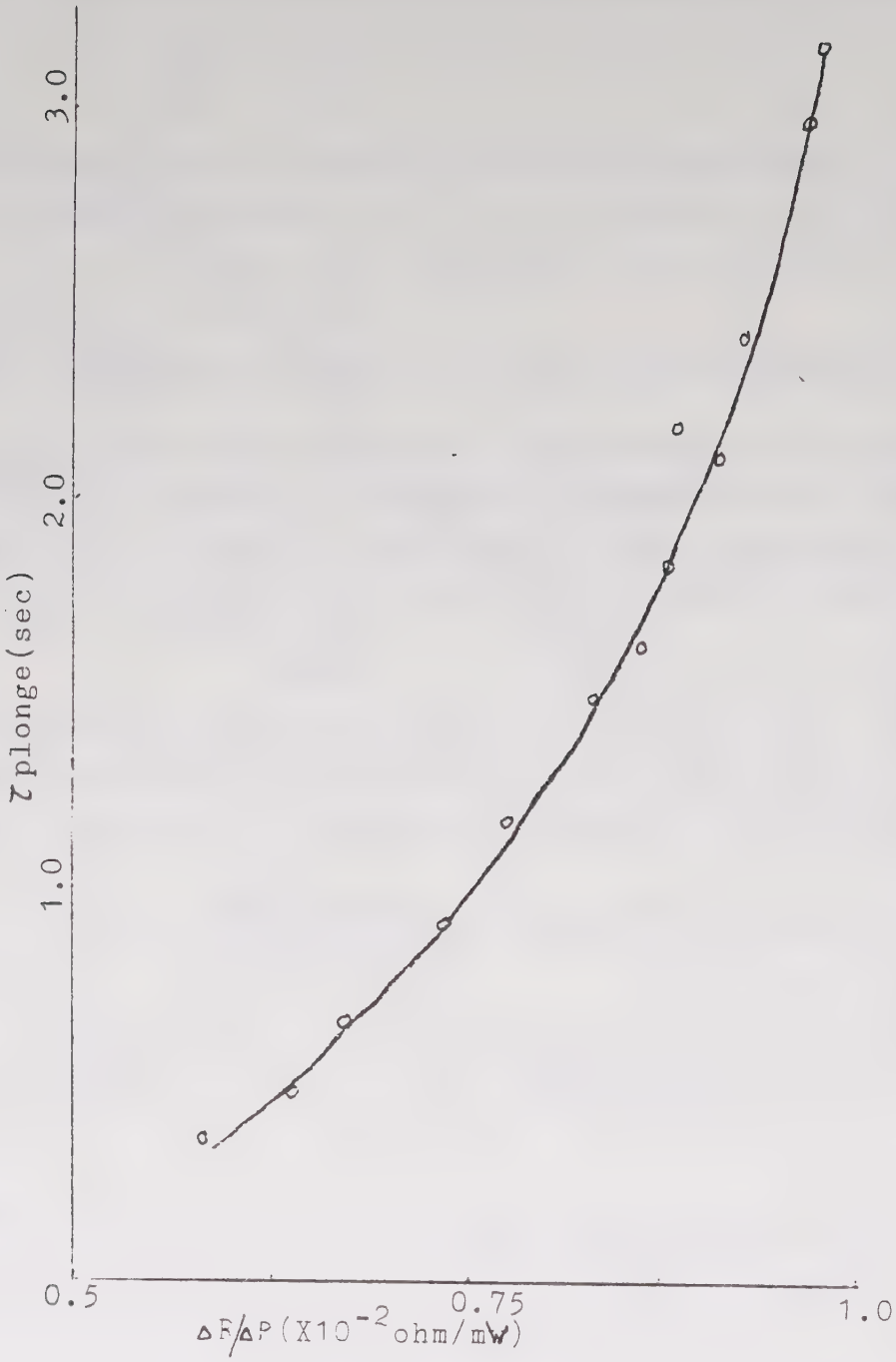
3.3.2 - Développement d'une transformation expérimentale

Pour traduire la pente de la courbe d'auto-échauffement en temps de réponse, il faut développer une transformation expérimentale entre la pente de la courbe d'auto-échauffement et le test de plongée.

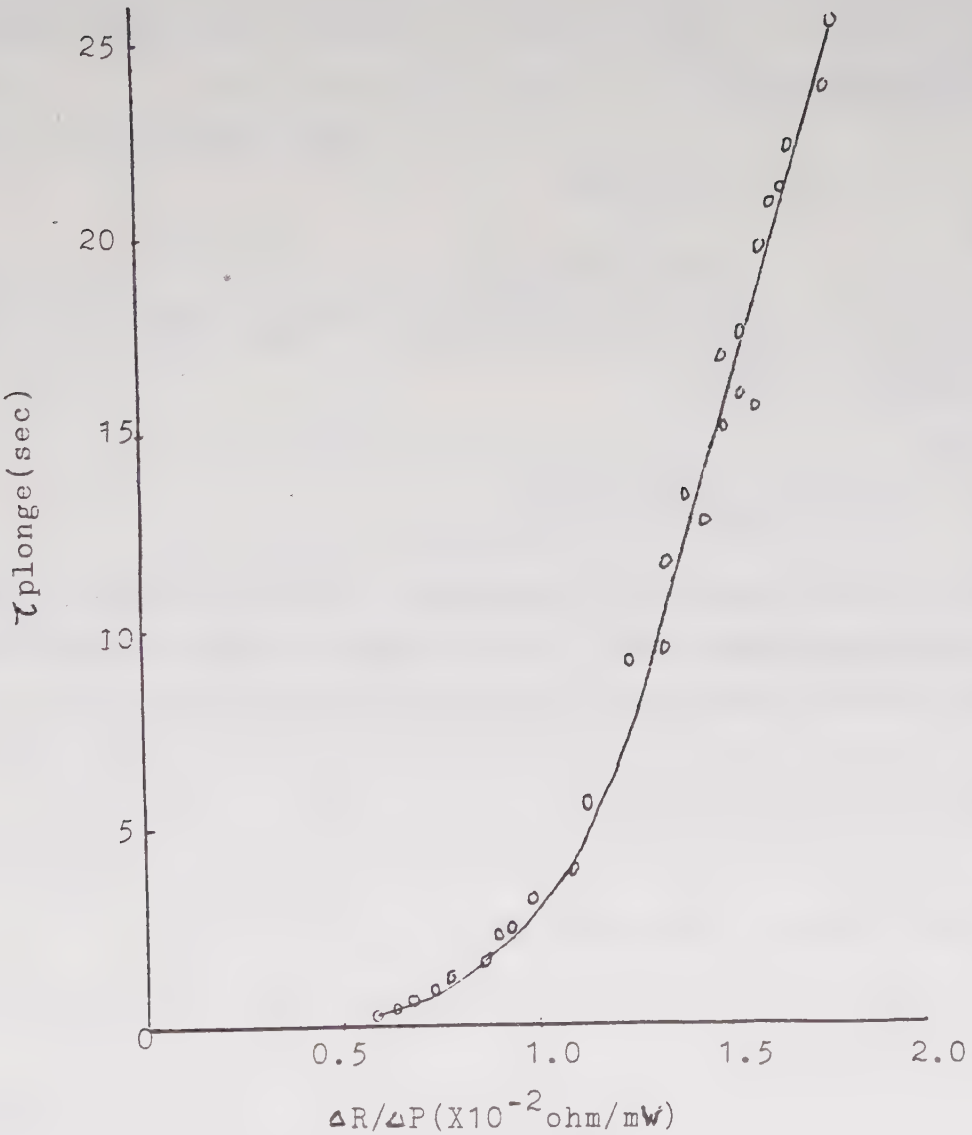
Il est possible de simuler le changement de la résistance dans le transfert de chaleur du capteur en ajoutant artificiellement une résistance de transfert de chaleur (comme une bande adhésive sur un tube de caoutchouc) à la surface du capteur. Une relation expérimentale en résulte entre le test de plongée et le test d'auto-échauffement. On calcule le temps de réponse de test de plongée pour chaque valeur de la pente de la courbe d'auto-échauffement. On dessine le temps de réponse du test de plongée avec $\frac{\Delta R}{\Delta Q}$, le résultat est la courbe de correlation entre le test de plongée et le test d'auto-échauffement. Les figures 3.10 et 3.11 donnent les courbes de correlation pour le capteur 176-KF.



figure(3.9) Courbe d'auto-échauffement pour le capteur 176-KF



figure(3.10) Corrélation expérimentale entre le test de plongée(plonge) et la pente de la courbe d'auto-echauffement pour 176-KF



figure(3.11) Corrélation expérimentale entre le test de plongée(plonge) et la pente de la courbe d'auto-echauffement pour 176-KF

3.4 - METHODE DE L'ANALYSE DE BRUIT

On donne ici quelques notions sur le principe de l'analyse de bruit, la modélisation par un modèle autorégressif, comment estimer les paramètres de ce modèle et son ordre optimal qui conduit à l'équation de YULE-WALKER. Pour plus de détails consulter /13/, /14/, /15/, /16/.

3.4.1 - Modèle autorégressif

Etant donnée une suite temporelle d'observations $\{Y_K\}$ de la réponse d'un système linéaire excité par une suite $\{V_K\}$ Par hypothèse la suite $\{V_K\}$ est une suite aléatoire normalement distribuée avec :

$$E(V_K)=0$$

et

$$E(V_K^2)=\sigma^2$$

la suite Y_K peut être modélisé sous la forme ARMA (auto-régressive à moyenne glissante)

$$Y_K = \sum_{i=1}^{\infty} a_i Y_{k-i} + \sum_{i=1}^{\infty} b_i V_{k-i} + V_k \qquad (1)$$

cette représentation n'a quelquefois pas de sens car la série peut être divergente. BOX /13/ a donné un modèle plus pratique (modèle autorégressif (AR) d'ordre fini)

$$Y_k = \sum_{i=1}^{n} a_i Y_{k-i} + \sum_{i=1}^{n} b_i V_{k-i} + V_k \qquad (2)$$

si Y_K est fonction du passé de V_K

$$Y_k = \sum_{i=1}^{\infty} b_i V_{k-i} + V_k \qquad (3)$$

l'espace d'observation engendré par $\{V_i \; i < K\}$ est égal à l'espace d'observation engendré par $\{Y_i \; i < K\}$ donc (2) prend la forme

$$Y_k = \sum_{i=1}^{n} a_i Y_k + V_k \qquad (4)$$

pour que ce processus soit stationnaire les racines de

$$1 - \sum_{i=1}^{n} a_i D^i = 0 \qquad (5)$$

doivent être en dehors du cercle unité /16/

3.4.2 - Estimation des paramètres du modèle (AR)

On définit la fonction d'auto-correlation du processus $\{Y_k\}$ au rang K par

$$\gamma_k = E(Y_{k+t} Y_t) \qquad (6)$$

parce que Y_K est un processus réel, la fonction d'auto-correlation est sysmétrique

$$\gamma_k = \gamma_{-k} \qquad \forall\ k \qquad (7)$$

En multipliant (4) par Y_{t-k} on obtient

$$Y_k Y_{t-k} = \sum_{i=1}^{n} a_i Y_{t-i} Y_{t-k} + Y_{t-k} V_k \qquad (8)$$

donc

$$E(Y_{t-k} Y_t) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(Y_{t-i} Y_{t-k}) \qquad (9)$$

car $E(Y_{t-k} V_k) = E(Y_{t-k})(E(V_t) = 0 \qquad (10)$

donc $\gamma_k = \sum_{i=1}^{n} a_i \gamma_{k-i} \qquad k>0 \qquad (11)$

En divisant par γ_o, qui est la correlation de rang zéro,

$$\rho_k = \sum_{i=1}^{n} a_i \rho_{k-i} \qquad k>0 \qquad (12)$$

où $\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \qquad \rho_0 = 1 \qquad (13)$

la corrélation est calculée à l'aide de la série des observations

$$\gamma_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-k} Y_i Y_{i+k} \qquad (14)$$

avec $$Y_i = Y_i - \frac{1}{N} \sum_{K=1}^{N} Y_k \qquad (15)$$

où N est le nombre d'observations donc

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= a_1 + a_2\rho_1 + \ldots\ldots\ldots a_n \rho_{n-1} \\
\rho_2 &= a_1\rho_1 + a_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_n \rho_{n-2} \\
&\vdots \\
\rho_n &= a_1\rho_{n-1} + a_2\rho_{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots a_n
\end{aligned} \qquad (16)$$

l'équation 16 est l'équation de YULE-WALKER

On peut l'écrire sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 \ldots\ldots\ldots \rho_{n-1} \\ \rho_1 & \ldots\ldots\ldots\ldots \rho_{n-2} \\ & \\ & \\ \rho_{n-1} & \rho_{n-2} \ldots\ldots\ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \\ \\ a_n \end{bmatrix} \qquad (17)$$

$$\underline{\rho} = P\,\underline{a} \qquad (18)$$

$$\hat{\underline{a}} = P^{-1}\underline{\rho} \qquad (19)$$

où P^{-1} est l'inverse de P

3.4.3 - Estimation de l'ordre optimal du modèle (AR)

Il est utile de trouver une estimation de l'ordre optimal de AR.

AKAIKE /16/ a trouvé l'expression d'un critère d'information, l'ordre optimal est donné par le minimum de ce critère.

Critère d'information = - log (maximum de vraisemblance)+ n (20)

La fonction du maximum de vraisemblance L est donné par

$$\hat{L} = (2\pi\sigma^2)^{N/2} \left(\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^{N} V_k^2\right)\right) \tag{21}$$

où

$$V_k = Y_k - \sum_{i=1}^{N} a_i Y_{k-i} \qquad k=1,2,\ldots\ldots,N \tag{22}$$

et la variance de bruit est approximée par

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} V_k^2 \tag{23}$$

l'ordre optimal n donne le minimum de

$$IC = - \log \hat{L} + n$$

d'après /16/ l'analyse de bruit donne une bonne estimation de la réponse du capteur en branche chaude mais elle donne de mauvais résultats en branche froide, parce que en branche froide il y a l'influence du générateur de vapeur qui rend le processus non aléatoire.

CHAPITRE 4

MODELE MATHEMATIQUE

Le modèle mathématique est valable sous réserve que les hypothèses suivantes soient vérifiées :

I Le mouvement de l'eau autour du capteur est laminaire

II La vitesse de l'eau est suffisante pour maintenir la température de la surface du capteur constante et égale à la température de l'eau.

III La matière du capteur est isotrope, c'est-à-dire que la propagation de la chaleur est la même dans toutes les directions.

IV La propagation de la chaleur est découplée c'est-à-dire qu'il n'y a pas de réaction chimique qui produise de la chaleur dans le capteur.

V La résistance de platine est symétrique par rapport à l'axe du capteur.

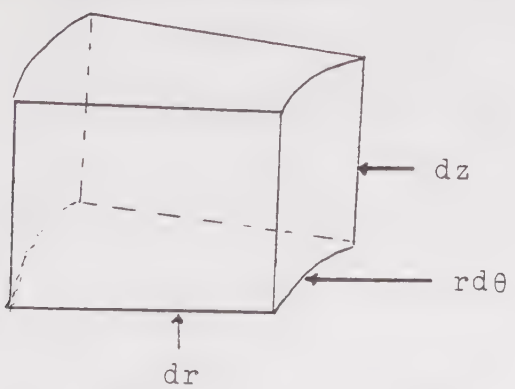
Soit un système de coordonnées cylindriques

$$r\ ,\ \theta\ ,\ z$$

Si on suppose que la température $U(r,\theta,z,t)$ est fonction de r,θ, z, t, symétrique par rapport à l'axe, on a

$$\frac{\partial U}{\partial \theta}=0$$

on prend un petit élément de volume dV pour que le gradient de U sur chaque face soit constant



$dV = rdrdzd\theta$

d'après la définition de la chaleur spécifique, la quantité de chaleur accumulée dans cet élément est

$$R_1 = \rho \frac{\partial U}{\partial t} dV \qquad (1)$$

où ρ est la chaleur spécifique

La somme algébrique des quantités de chaleur qui entrent et qui sortent par les faces de cet élément est

$$\begin{aligned} R_2 = {} & K(r+\Delta r,z) \frac{\partial U(r+\Delta r,z,t)}{\partial r}(r+\Delta r)d\theta dz \\ & -K(r,z) \frac{\partial U(r,z,t)}{\partial r} r d\theta dz \\ & +(r+\Delta r) K(r,z+z) \frac{\partial U(r,z+\Delta z,t)}{\partial z} \\ & -K(r,z) \frac{\partial U(r,z,t)}{\partial z} \} d\theta dr \end{aligned} \qquad (2)$$

où $K(r,z)$ est le coefficient de conductivité

on a

$$R_1 = R_2 \qquad (3)$$

donc

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial U(r,z,t)}{\partial t} r dr d\theta dz = {} & (K(r+\Delta r,z) \frac{\partial U(r+\Delta r,z,t)}{\partial r}(r+\Delta r) \\ & -K(r,z) \frac{\partial U(r,z,t)}{\partial r}) d\theta dz \\ & + (K(r,z+\Delta z) \frac{\partial U(r,z+\Delta z,t)}{\partial z} \\ & K(r,z) \frac{\partial U(r,z,t)}{\partial z}) r dr d\theta \end{aligned} \qquad (4)$$

donc

$$\frac{\partial U(r,z,t)}{\partial t} = \frac{K(r+\Delta r,z)\,\frac{\partial U(r+\Delta r,z,t)}{\partial r}(r+\Delta r) - K(r,z)\frac{\partial U(r,z,t)}{\partial r}r}{r\Delta r}$$

$$+ \frac{K(r,z+\Delta z)\frac{\partial U(r,z+\Delta z,t)}{\partial z} - K(r,z+)\frac{\partial (r,z,t)}{\partial z}}{\Delta z} \qquad (5)$$

si on prend la limite quand $\Delta z, \Delta r \longrightarrow 0$
on a

$$\frac{\partial U(r,z,t)}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(K(r,z)\partial\frac{U(r,z,t)}{\partial r}r) + \frac{\partial}{\partial z}(K(r,z)\frac{\partial U(r,z,t)}{\partial z}) \qquad (6)$$

si K(r,z) est constant on a

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{K}{\rho}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) \qquad (7)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = C\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) \qquad (8)$$

OU $C = \frac{K}{\rho}$ e est le coéfficient de diffusivité

donc le problème à résoudre est le suivant

$$\frac{\partial U}{\partial t} = C\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)$$

$$U(r,z,0)=U_0$$

$$U(R,z,t)=U_1 \qquad (9)$$

$$U(r,0,t)=U_1$$

où U_1 est la température de l'eau

$U(R,z,t), U(r,0,t)$ est la température sur la surface du capteur.

U_0 est la température initiale.

Pour résoudre ce problème on utilise une méthode numérique. Pour le résoudre sur un calculateur numérique, on va utiliser la méthode des différences finies.

On remplace l'équation aux dérivées partielles par une équation aux différences.

On prend un pas de temps = k est pas d'espace = h

donc

$$t=k \quad \text{et} \quad r=h=z \tag{10}$$

on a

$$U(r,z,t)= U(lh,mh,nk) \tag{11}$$

$$r=lh \quad , \quad z=mh \quad , \quad nk = t \tag{12}$$

Le développement en série de Taylor de U donne

$$U(r,z,t+k)=(1+k\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}k^2\frac{\partial}{\partial t^2}+ \frac{1}{3!}\, k^3\frac{\partial^3}{\partial t^3}+\cdots\cdots\cdots)U(r,z,t)$$

$$=\exp(k\frac{\partial}{\partial t})\; U(r,z,t) \tag{13}$$

si $r=lh$, $z=mh$, $t=nk$

on écrit

$$U(r,z,t)= U^n_{l,m} \tag{14}$$

donc on peut écrire (13) sous la forme

$$U^{n+1}_{l,m}= \exp(k\frac{\partial}{\partial t})\; U^n_{l,m} \tag{15}$$

par 8 on a

$$U^{n+1}_{l,m} =\exp(kC(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+ \frac{1\partial}{r\;\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})\; U^n_{L,m} \tag{16}$$

car sur l'axe du capteur, c'est-à-dire sur l'axe Z, la température est minimale ou maximale, ce qui se traduit par

$$\frac{\partial U}{\partial r} =0 \tag{17}$$

donc au voisinage, très proche de l'axe Z on met $\frac{\partial U}{\partial r} = 0$ pour éviter le dégât causé par le terme $\frac{1}{r}$

quand r tend vers zéro

donc au voisinage de l'axe Z (16) devient

$$U_{l,m}^{n+1} = \exp\left(kC\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right) U_{l,m}^{n} \tag{18}$$

Pour résoudre le problème sur un ordinateur on remplace l'opérateur différentiel $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{\partial U}{r\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)$ par un opérateur de différence en δ .

La relation entre D l'opérateur différentiel et δ l'opérateur de différence centrale est donnée par

$$D = \frac{2}{h}\sinh^{-1}\frac{\delta}{2} = \frac{1}{h}\left(\delta - \frac{}{2^2 3!}\delta^3 + \frac{1.3^2}{2^4 5!}\delta^5 \ldots\ldots\ldots\right) \tag{19}$$

où

$$\delta_r U_{l,m}^{n} = U_{l+\frac{1}{2},m}^{n} - U_{l-\frac{1}{2},m}^{n} \tag{20}$$

$$\delta_r^2 U_{l,m}^{n} = U_{l+1,m}^{n} + U_{l-1,m}^{n} - 2U_{l,m}^{n} \tag{21}$$

donc l'équation (16) devient

$$U_{l,m}^{n+1} = \exp\left(kC\left(\left(\frac{2}{h}\sinh^{-1}\frac{\delta_r}{2}\right)^2 + \frac{2}{h}\sinh^{-1}\frac{\delta_r}{2} + \left(\frac{2}{h}\sinh\delta_z^{-1}\right)^2\right)\right) U_{l,m}^{n} \tag{22}$$

$$= \exp\left(kC\left(\left(\frac{1}{h}\left(\delta_r - \frac{1}{2^2 3!}\delta_r^3 + \frac{1 3^2}{2^4 5!}\delta_r^5 + \ldots\ldots\right)\right)^2\right.\right.$$

$$\left.\frac{1}{rh}\left(\delta_r - \frac{1}{2^2 3!}\delta_r^3 + \frac{1 3^2}{2^4 5!}\delta_r^5 + \ldots\ldots\right)\right.$$

$$\left.\left.\left(\frac{1}{h}\left(\delta_z - \frac{1}{2^2 3!}\delta_r^3 + \frac{1 3^2}{2^4 5!}\delta_r^5 \ldots\ldots\ldots\right)\right)^2\right) U_{l,m}^{n}$$

$$= \exp\left(\frac{kC}{h^2}\left(\delta_r^2 + \frac{h}{r}\delta_r + \delta_z^2 + O(\delta^3)\right)\right) U_{l,m}^{n} \tag{23}$$

On prend

$$U^{n+1}_{l,m} = (1+a(\delta_r^2 + \frac{h}{r}\delta_r + \delta_z^2))U^n_{l,m} \qquad (24)$$

$$U^{n+1}_{l,m} = (1-4a)U^n_{l,m} + a(U^n_{l+1,m}+U^n_{l-1,m}+U^n_{l,m+1}+U^n_{l,m-1})$$

$$\frac{ah}{r}(U^n_{l+\frac{1}{2},m}-U^n_{l-\frac{1}{2},m}) \qquad (25)$$

où $a = \frac{kC}{h^2}$

donc (25) avec les conditions initiales

$$U^0_{l,m} = U_0$$

$$U^n_{1,m} = U^n_{l,1} = U_1 \qquad \forall\, n \qquad (26)$$

(où $U^n_{1,m}, U^n_{l,1}$ sont la température sur la surface du capteur) est la forme de différence finie pour (9)

donc si $u(r,z,t)$ est la solution exacte de l'équation (9)

$U(lh,mh,nk)$ est la solution numérique

On va maintenant chercher les conditions pour lesquelles la solution numérique converge vers la solution exacte et que cette solution soit stable d'après le théorème de VON-NEUMANN (5).

Premièrement on va déterminer l'erreur de troncature pour l'équation (16)

4.1 - L'ERREUR DE TRONCATURE

D'après Taylor on a :

$$U^{n+1}_{l,m} = U^n_{l,m} + k(\frac{\partial J}{\partial t})^n_{l,m} + \frac{k^2}{2}(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2})^{n+\alpha}_{l,m} \qquad (27)$$

où $(n+\alpha)\varepsilon(n,n+1)$

$$U^n_{l+1,m} = U^n_{l,m} + h\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)^n_{l,m} + \frac{h^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\right)^n_{l,m} + \frac{h^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 U}{\partial r^3}\right)^n_{l,m} + \frac{h^4}{4!}\left(\frac{\partial^4 U}{\partial r^4}\right)^{n+}_{l+\beta,m} \qquad (28)$$

où $(l+\beta)\varepsilon(l,l+1)$

$$U^n_{l-1,m} = U^n_{l,m} - h\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)^n_{l,m} + \frac{h^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\right)^n_{l,m} - \frac{h^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 U}{\partial r^3}\right)^n_{l,m} + \frac{h^4}{4!}\left(\frac{\partial^4 U}{\partial r^4}\right)^n_{l-\beta_1,m} \qquad (29)$$

où $(l-\beta_1)\varepsilon(l-1,l)$

$$U^n_{l,m+1} = U^n_{l,m} + h\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^n_{l,m} + \frac{h^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)^n_{l,m} + \frac{h^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 U}{\partial z^3}\right)^n_{l,m} + \frac{h^4}{4!}\left(\frac{\partial^4 U}{\partial z^4}\right)^n_{l,m+\gamma} \qquad (30)$$

ou $(m+\gamma)\varepsilon(m,m+1)$

$$U^n_{l,m-1} = U^n_{l,m} - h\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^n_{l,m} + \frac{h^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)^n_{l,m} - \frac{h^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 U}{\partial z^3}\right)^n_{l,m} + \frac{h^4}{4!}\left(\frac{\partial^4 U}{\partial z^4}\right)^n_{l,m-\gamma_1} \qquad (31)$$

ou $(m-\gamma_1)\varepsilon(m-1,m)$

$$U^n_{l+\frac{1}{2},m} = U^n_{l,m} + \frac{h}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)^n_{l,m} + \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\right)^n_{l,m} + \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 U}{\partial r^3}\right)^n_{l,m} + \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^4}{4!}\left(\frac{\partial^4 U}{\partial r^4}\right)^n_{l+\beta_2,m} \qquad (32)$$

ou $(l+\beta_2)\varepsilon(l+\frac{1}{2},l)$

$$U^n_{l-\frac{1}{2},m} = U^n_{l,m} - \frac{(\frac{h}{2})}{1!}(\frac{\partial U}{\partial r})^n_{l,m} + \frac{(\frac{h}{2})^2}{2!}(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2})^n_{l,m} - \frac{(\frac{h}{2})^3}{3!}(\frac{\partial^3 U}{\partial r^3})^n_{l,m} + \frac{(\frac{h}{2})^4}{4!}(\frac{\partial^4 U}{\partial r^4})^n_{l-\beta_3,m} \quad (33)$$

où $(l-\beta_3)\varepsilon(l-\frac{1}{2},l)$

donc l'équation (25) devient

$$U^{n+1}_{l,m} - (1-4a)U^n_{l,m} + a(U^n_{l+1,m} + U^n_{l-1,m} + U^n_{l,m+1} + U^n_{l,m-1}) + \frac{ah}{r}(U^n_{l+\frac{1}{2},m} - U^n_{l-\frac{1}{2}2m})$$

$$= k(\frac{\partial U}{\partial t} - C(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2})) + \frac{k^2}{2}(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2})^{n+\alpha}_{l,m} + \frac{ah^4}{24}((\frac{\partial^4 U}{\partial r^4})^n_{l\pm\beta,m} + (\frac{\partial^4 U}{\partial r^4})^n_{l-\beta,m} + (\frac{\partial^4 U}{\partial z^4})^n_{l,m+\gamma}$$

$$+ (\frac{\partial^4 U}{\partial z^4})^n_{l,m-\gamma_1} + \frac{1}{r}((\frac{\partial^3 U}{\partial r^3})^n_{l,m} + \frac{h}{8}((\frac{\partial^4 U}{\partial r^4})^n_{l-\beta_2,m} - (\frac{\partial^4 U}{\partial r^4})^n_{l-\beta_3,m}))$$

$$= k(\frac{\partial U}{\partial t} - C(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}) + kA(k+h^2) \quad (34)$$

où A dépend de $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^3 U}{\partial r^3}$, $\frac{\partial^4 U}{\partial r^4}$, et $\frac{\partial^4 U}{\partial z^4}$ au voisinage des intervalles $(l-1,l+1)$, $(m-1,m+1)$, $(n,n+1)$

si $u^n_{l,m}$ est une solution exacte et $U^n_{L,m}$ est la solution numérique, on écrit

$$Z^n_{l,m} = u^n_{l,m} - U^n_{l,m} \quad (35)$$

$$Z^{n+1}_{l,m} = (1-4a)Z^n_{l,m} + a((Z^n_{l,m+1} + Z^n_{l,m-1} + Z^n_{l+1,m} + Z^n_{l-1,m}) + \frac{h}{r}(Z^n_{l+\frac{1}{2},m} - Z^n_{l-\frac{1}{2},m}))$$

$$+ \frac{k^2}{2}(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2})^{n+\alpha}_{l,m} + \frac{ah^2}{24}((\frac{\partial^4 u}{\partial r^4})^n_{l+\beta,m} + (\frac{\partial^4 u}{\partial r^4})^n_{l-\beta_1,m+} + (\frac{\partial^4 u}{\partial z^4})^n_{l,m+\gamma}$$

$$+ (\frac{\partial^4 u}{\partial z^4})^n_{l,m-} + \frac{1}{r}((\frac{\partial^3 u}{\partial r^3})^n_{l,m} + \frac{h}{8}((\frac{\partial^4 u}{\partial r^4})^n_{l,\beta_2,m} - (\frac{\partial^4 u}{\partial r^4})^n_{l-\beta_3,m}))) \quad (36)$$

donc l'erreur de troncature est

$$\frac{1}{2}k^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^{n+\alpha}_{l,m} + \frac{ah^2}{24}\left(\left(\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}\right)^{n}_{l+\beta,m} + \left(\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}\right)^{n}_{l-\beta_1,m} + \left(\frac{\partial^4 u}{\partial z^4}\right)^{n}_{l,m+\gamma} + \left(\frac{\partial^4 u}{\partial z^4}\right)^{n}_{l,m-\gamma} + \frac{1}{r}\left(\left(\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}\right)^{n}_{l,m} + \frac{h}{8}\left(\left(\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}\right)^{n}_{l+\beta_2,m} - \left(\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}\right)^{n}_{l-\beta_3,m}\right)\right)\right)$$

$$= A(k^2+kh^2) \qquad (37)$$

où A dépend de $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial z^4}$

au voisinage des intervalles (n,n+1) , (l-1,l+1) , (m-1,m+1)

7.3 - LA CONVERGENCE

Pour étudier la convergence de la solution numérique vers la solution exacte et sa stabilité, il est préférable d'utiliser les coordonnées cartésiennes

on a

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta \quad , z = z \qquad (38)$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad \text{tag}\theta = \frac{y}{x}$$

donc (39)

$$2x = 2r\frac{\partial r}{\partial x} \qquad 2y = 2r\frac{\partial r}{\partial y} \qquad (40)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos\theta \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin\theta \qquad (41)$$

$$(1+\text{tag}^2\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \qquad \frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{-\sin\theta}{r} \qquad (42)$$

$$(1+\text{tag}^2\theta)\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{1}{x} \qquad \frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r} \qquad (43)$$

donc

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x} \qquad (44)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y} \qquad (45)$$

comme $\frac{\partial u}{\partial\theta} = 0$ on a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta \tag{46}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta \tag{47}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta\right)\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta\right)\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta\right)\cos\theta + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta\right)\left(\frac{-\sin\theta}{r}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cos^2\theta + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\sin^2\theta}{r} \tag{48}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta\right)\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta\right)\frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta\right)\sin\theta + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta\right)\frac{\cos\theta}{r}$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\sin^2\theta + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\cos^2\theta}{r} \tag{49}$$

ϕdonc

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{r\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{50}$$

donc on peut écrire l'équation (9) sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{51}$$

et si on prend

$x = lh$, $y = mh$, $z = jh$ et $t = nk$

l'équation (23) devient

$$U^{n+1}_{l,m,j} = \exp\left(\frac{kC}{h^2}\left((1+\delta_x^2)(1+\delta_y^2)(1+\delta_z^2)+O(\delta^3)\right)\right)U^{n}_{l,m,j} \tag{52}$$

$$U^{n+1}_{l,,m,j} = (1+ a(\delta_x^2 + \delta_y^2 + \delta_z^2))\ U^{n}_{l,m,j} \tag{53}$$

par le même calcul on obtient l'erreur de troncature égale à

$$A(k^2 + kh^2)$$

où A dépend de $(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2})^{n+\alpha}_{l,m,j}$, $(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4})^{n}_{l+\beta,m,j}$, $(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4})^{n}_{l-\beta_1,m,j}$

(54)

$(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4})^{n}_{l,m+\beta_2,j}$, $(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4})^{n}_{l,m-\beta_3,j}$, $(\frac{\partial^4 u}{\partial z^4})^{n}_{l,m,j+\gamma}$ $(\frac{\partial^4 u}{\partial z^4})^{n}_{l;m,j-\gamma_1}$

donc si $Z^n_{l,m,j} = u^n_{l,m,j} - U^n_{l,m,j}$ est la différence entre la solution exacte et la solution numérique, l'équation (36) devient

$$Z^{n+1}_{l,m,j} = (1-6a)Z^n_{l,m,j} + a(Z^n_{l+1,m,j} + Z^n_{l-1,m,j} + Z^n_{l,m+1,j} + Z^n_{l,m-1,j} + Z^n_{l,m,j+1} + Z^n_{l,m,j-1}) + \frac{k^2}{2}(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2})^{n+\alpha}_{l,m,j} + \frac{ah^2}{24}((\frac{\partial^4 u}{\partial x^4})^{n}_{l+\beta,m,j} + (\frac{\partial^4 u}{\partial x^4})^{n}_{l-\beta_1,m,j} + (\frac{\partial^4 u}{\partial y^4})^{n}_{l,m+\beta_2,j} + (\frac{\partial^4 u}{\partial y^4})^{n}_{l,m-\beta_3,j} + (\frac{\partial^4 u}{\partial z^4})^{n}_{l,m,j+\gamma} + (\frac{\partial^4 u}{\partial z^4})^{n}_{l,m,j-\gamma_1} \quad (55)$$

donc

$$Z^{n+1}_{l,m,j} = (1-6a)Z^n_{l,m,j} + a(Z^n_{l+1,m,j} + Z^n_{l-1,m,j} + Z^n_{l,m+1,j} + Z^n_{l,m-1,j} + Z^n_{l,m-1,j} + Z^n_{l,m,j+1} + Z^n_{l,m,j-1}) + A(k^2+kh^2) \quad (56)$$

on dit que la solution numérique converge vers la solution exacte si

$$Z(x,y,z,t) = (u(x,y,z,t) - U(x,y,z,t)) \longrightarrow 0 \quad (57)$$

quand L, M, J, N $\longrightarrow \infty$ tel que

nk, lh, mh, jh $\longrightarrow$ t, x, y, z respectivement (58)

quand k, h $\longrightarrow$ o

on prend

$$Z(x,y,z,t)=Z^n_{l,m,j}$$

donc l'équation (56)

$$Z^{n+1}_{l,m,j}=(1-6a)Z^n_{l,m,j}+a(Z^n_{l+1,m,j}+Z^n_{I-1,m,j}+Z^n_{l,m+1,j}+Z^n_{l,m-1,j}+Z^n_{l,m,j+1}+Z^n_{l,m,j-1})+A(k^2+kh^2) \quad (59)$$

si $a \leq \frac{1}{6}$

on a

$$|Z^{n+1}_{l,m,j}|=(1-6a)|Z^n_{l,m,j}|+a(|Z^n_{l+1}|_{m,j}+|Z^n_{l-1}|_{m,j}+|Z^n_{l}|_{m+1,j}+|Z^n_{l}|_{m-1,j}+|Z^n_{l}|_{m,j+1}+|Z^n_{l}|_{m,j-1})+A(k^2+kh^2) \quad (60)$$

donc

$$Z^n_{l,m,j} \leq Z^n + A(k^2+kh^2) \quad (61)$$

où $Z^n = \max(|Z^n_l|_{m,j},|Z^n_{l+1}|_{m,j},|Z^n_{l-1}|_{m,j},|Z^n_l|_{m+1,j},|Z^n_l|_{m-1,j},|Z^n_l|_{m,j+1},|Z^n_l|_{m,j-1})$

par la condition initiale $Z^\circ = 0$ (62)

on a

$$Z_{l,m,j}= kA(k+h^2)$$

$$Z^2_{l,m,j}=2kA(k+h^2)$$

$$Z^3_{l,m,j}=3kA(k+h^2)$$

$$\vdots$$

$$Z^n_{l,m,j}=(nk)A(k+h^2) \quad (63)$$

$$\lim_{n\to\infty} Z^n_{l,m,j}=\lim_{n\to\infty} nkA(k+h^2) \quad (64)$$

quand k et $h \longrightarrow 0$ tel que $nk \longrightarrow t$

on a

$$\lim_{n\to\infty} Z^n_{l,m,j} = tA(k+h^2) \longrightarrow 0 \quad (65)$$

c'est-à-dire Z converge vers zéro, c'est-à-dire la solution numérique converge vers la solution exacte.

1.4 - LA STABILITE

On va étudier les conditions pour que la différence

$$Z^n_{l,m,j} = u^n_{l,m,j} - U^n_{l,m,j}$$

entre la solution exacte et la solution numérique reste bornée quand

I k est fixe et $n \longrightarrow \infty$

II h et $k \longrightarrow 0$ tel que $\frac{k}{h^2}$ est fixe et $t = nk$

On va utiliser la méthode de VON NEUMANN qui basée sur la décomposition harmonique de l'erreur Z en chaque point par exemple en dimension 1

on a

$$E(x) = \sum_j A_j e^{i\beta_j x} \qquad (66)$$

où en général les fréquences $|\beta_j|$ et j sont arbitraires ; donc on considère un seul terme $e^{i\beta x}$ ou β est réel. Si on considère t = o, pour étudier la propagation d'erreur, on cherche la solution de l'équation aux différences qui tend vers

$$e^{i\beta x} \quad \text{quand} \quad t=0$$

on suppose que cette solution est de la forme

$$e^{\alpha t}\, e^{i\beta x} \qquad (67)$$

où $\alpha = \alpha(\beta)$ est en général complexe.

Donc l'erreur reste bornée si

$$|e^{\alpha k}| \leq 1 \qquad \forall\ \alpha \qquad (68)$$

$|e^{\alpha k}| \leq 1$ est le critère de VON NEUMANN pour la stabilité

On a pour dimension 1

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{69}$$

$$U_l^{n+1} = (1-2a)U_l^n + a(U_{l+1}^n + U_{l-1}^n) \tag{70}$$

si $Z^n = \xi^n e^{i\beta lh}$ (71)

où $\xi = e^{\alpha k}$ (72)

donc $\xi^{n+1} e^{i\beta lh} = = \xi^n((1-2a)e^{i\beta lh} + a(e^{i\beta(l+1)h} + e^{i\beta(l-1)h}))$ (73)

$$\xi = 1-2a+2a\cos\beta h$$
$$= 1-2a(1-\cos\beta h)$$
$$= 1-4a\sin^2\frac{\beta h}{2} \tag{74}$$

pour

$$|\xi| \leq 1$$

on a $|1-4a\sin^2\frac{\beta h}{2}| \leq 1$

c'est-à-dire

$$a \leq \frac{1}{2}$$

Pour trois dimensions

$$Z_{l,m,j}^n = \xi^n e^{i\beta lh} e^{i\gamma mh} e^{i\eta jh} \tag{77}$$

par substituion dans l'équation (56) on a

$$\xi^{n+1} e^{i\beta lh} e^{i\gamma mh} e^{i\eta jh} = = \xi^n(1-6a)e^{i\beta lh} e^{i\gamma mh} e^{i\eta jh}$$
$$+a\xi^n(e^{i\beta(l+1)h} + e^{i\beta(l-1)h})e^{i\gamma mh} e^{i\eta jh}$$
$$+a\xi^n(e^{i\gamma(m+1)h} + e^{i\gamma(m-1)h})e^{i\beta lh} e^{i\eta jh}$$
$$+a\xi^n(e^{i\eta(j+1)h} + e^{i\eta(j-1)h})e^{i\beta lh} e^{i\gamma mh} \tag{78}$$

donc

$$\xi = (1-6a) + a(2\cos\beta h + 2\cos\gamma h + 2\cos\eta h)$$

$$= 1 - 2a(1-\cos\beta h) + 2a(1-\cos\gamma h) + 2a(1-\cos\eta h)$$

$$= 1 - 4a\left(\sin^2\frac{\beta h}{2} + \sin^2\frac{\gamma h}{2} + \sin^2\frac{\eta h}{2}\right) \qquad (79)$$

la condition de stabilité est $|\xi| \leq 1$

c'est-à-dire

$$\left|1 - 4a\left(\sin^2\frac{\beta h}{2} + \sin^2\frac{\gamma h}{2} + \sin^2\frac{\eta h}{2}\right)\right| \leq 1 \qquad (80)$$

c'est-à-dire

$$a \leq \frac{1}{6} \qquad (81)$$

où

$$a = \frac{kC}{h^2} \qquad (82)$$

où C est le coefficient de diffusité et K est le pas de temps et h est le pas d'espace

donc

$$k \leq \frac{h^2}{6C} \qquad (83)$$

en coordonnées cylindriques on a

$$\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{2}\,h \qquad (84)$$

$$\Delta t \leq \frac{\sqrt{2}h^2}{6C} < \frac{h^2}{5C} \qquad (85)$$

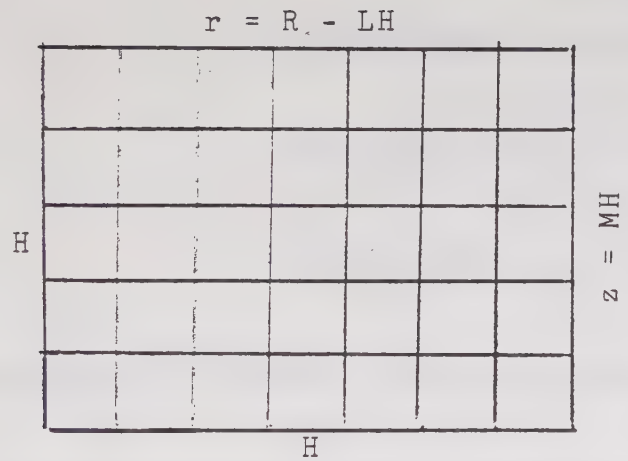
donc on choisit le pas de temps K inférieur ou égal à $\frac{h^2}{5C}$ pour que la solution soit stable. C'est-à-dire que la propagation soit bornée dans ce cas la solution numérique converge vers la solution exacte même si t est grande.

CHAPITRE 5

DISCRETISATION

Pour discrétiser le problème on va prendre une maille de pas H en r et z et les indices L, M tels que : r = R - LH et z = MH où R est le rayon du capteur :

On désigne par AU(L,M) la température au point (LH,MH) au temps t, et par BU(L,M) la température au point (LH, MH) au temps (t + K), par K(L,M) le coefficient de diffusivité au point (LH,MH) et par AK le coefficient de diffusivité de l'acier inoxydable et BK le coefficient de diffusivité de l'oxyde de magnésium, U_o la température initiale et U_1 la température à la surface du capteur.



donc l'équation à résoudre est

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1\partial}{r\partial r}\left(rK(r,z)\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K(r,z)\frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

$$= K(r,z)\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{K(r,z)}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial K(r,z)}{\partial r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}K(r,z)$$

$$+ \frac{\partial K(r,z))}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial z} \qquad (5.1)$$

où K(r,Z) est le coefficient de diffusité et avec les conditions aux limites

$$U(r,z,o) = U_o \qquad \text{(température initiale)}$$

$$U(R,z,t) = U(r,0,t) = U_1$$

où U_1 est la température de la surface du capteur.

Comme on le voit sur la figure (5.3) il y a deux régions : la région de l'acier inoxydable et la région de l'oxyde de magnésium. Dans ces deux régions le coefficient de diffusité est constant donc la dérivée est nulle et l'équation (1) prend la forme

$$\frac{\partial U}{\partial t} = K(r,z)\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) \qquad (5.2)$$

mais surla frontière $\frac{\partial K(r,z)}{\partial r}$, $\frac{\partial K(r,z)}{\partial r}$

égalent la mesure de DIRAC
mais on a aussi les conditions de continuité

$$K(r+\Delta,z)\frac{\partial U(r+\Delta,z,t)}{\partial r} = K(r-\Delta,z)\frac{\partial U(r-\Delta,z,t)}{\partial r} \qquad ((5.3)$$

$$K(r,z+\Delta)\frac{\partial U(r,z+\Delta,t)}{\partial z} = K(r,z-\Delta)\frac{\partial U(r,z-\Delta,t)}{\partial z} \qquad (5.4)$$

donc on va discrétiser en quatre points et prendre la moyenne de ces quatre discrétisations.

Les quatre discrétisations sont les quatre équations suivantes
Equation I

$$\begin{aligned}\frac{EU(L,M)-AU(L,M)}{k} &= \frac{1}{rH^2}\Big((K(L+\tfrac{1}{2},M)(AU(L+1,M)-AU(L,M)(r+H) \\ &\qquad -K(L-\tfrac{1}{2},M)(AU(L,M)-AU(L-1,M))r) \\ &\quad + \frac{1}{H^2}(K(L,M+\tfrac{1}{2})(AU(L,M+1)-AU(L,M)) \\ &\qquad -K(L,M-\tfrac{1}{2})(AU(L,M)-AU(L,M-1) \\ &= \frac{1}{H^2}(K(L+\tfrac{1}{2},M)AU(L+1,M)+K(L-\tfrac{1}{2},M)AU(L-1,M) \\ &\qquad -(K(L+\tfrac{1}{2},M)+K(L-\tfrac{1}{2},M))AU(L,M)) \\ &\quad + \frac{1}{rH}(K(L+\tfrac{1}{2},M)(AU(L+1,M)-AU(L,M)) \\ &\quad + \frac{1}{H^2}(K(L,M+\tfrac{1}{2},)AU(L,M+1)+K(L,M-\tfrac{1}{2})AU(L,M-1) \\ &\qquad -(K(L,M+\tfrac{1}{2})+K(L,M-1)_2 AU(L,M)) \qquad (5.5)\end{aligned}$$

Equation II

$$\frac{BU(L,M)-AU(L,M)}{k} = \frac{1}{rH^2}\left(K(L+\tfrac{1}{2},M)(AU(L+1,M)-AU(L,M))(r+\tfrac{H}{2})\right.$$
$$\left.-K(L-\tfrac{1}{2},M)(AU(L,M)-AU(L-1,M))r-\tfrac{H}{2}\right)$$
$$+\frac{1}{H^2}\left(K(L,M+\tfrac{1}{2})(AU(L,M+1)-AU(L,M))\right.$$
$$\left.-K(L,M-\tfrac{1}{2})(AU(L,M)-AU(L,M-1))\right)$$
$$=\frac{1}{H^2}\left(K(L+\tfrac{1}{2},M)AU(L+1,M)+K(L-\tfrac{1}{2},M)AU(L-1,M)\right.$$
$$+\frac{1}{2rH}\left(K(L+\tfrac{1}{2},M)AU(L+1,M)-K(L-\tfrac{1}{2},M)AU(1,M)\right.$$
$$\left.-\{K(L+\tfrac{1}{2},M)-K(L-\tfrac{1}{2},M)AU(L,M)\right)$$
$$+\frac{1}{H^2}\left(K(L,M+\tfrac{1}{2})AU(L,M+1)+K(L,M-\tfrac{1}{2})AU(L,M-1)\right.$$
$$\left.(K(L,M+\tfrac{1}{2})+K(L,M-\tfrac{1}{2})AU(L,M)\right) \qquad (5.6)$$

Equation III

$$\frac{BU(L,M)-AU(L,M)}{k} = \frac{1}{rH^2}\left(K(L+1,M)(AU(L+1,M)-AU(L,M))(r+H\right.$$
$$\left.-K(L,M)(AU(L,M)-au(L-1,M))(r\right.$$
$$+\frac{1}{H^2}\left(K(L,M+1)(AU(L,M+1)-AU(L,M))\right.$$
$$\left.-K(L,M)(AU(L,M)-AU(L,M-1))\right)$$
$$=\frac{1}{H^2}\left(K(L+1,M)AU(L+1,M)+K(L,M)AU(L-1,M)\right.$$
$$\left.-(K(L+1,M)+K(L,M))AU(L,M)\right)$$
$$+\frac{1}{rH}\left(K(L+1,M)(AU(L+1,M)-AU(L,M))\right.$$
$$+\frac{1}{H^2}\left(K(L,M+1)AU(L,M+1)+K(L,M)AU(L,M-1)\right.$$
$$\left.-(K(L,M+1)+K(L,M))AU(L,M)\right) \qquad (5.7)$$

Equation IV

$$
\begin{aligned}
BU(L,M)-AU(L,M) &= \frac{1}{rH^2}\,(K(L+1,M)(AU(L+1,M)-AU(L,M))(r+\tfrac{H}{2}) \\
&\qquad -K(L,M)(AU(L,M)-AU(L-1,M))(r-\tfrac{H}{2}) \\
&\quad + \frac{1}{H^2}\,(K(L,M+1)(AU(L,M+1)-AU(L,M)) \\
&\qquad -K(L,M)(AU(L,M)-AU(L,M-1))) \\
&= \frac{1}{H^2}\,(K(L+1,M)AU(L+1,M)+K(L,M)AU(L-1,M) \\
&\qquad -(K(L+1,M)+K(L,M))AU(L,M)) \\
&\quad + \frac{1}{2rH}(K(L+1,M)AU(L+1,M)-K(L,M)AU(L-1,M) \\
&\qquad -(K(L+1,M)-K(L,M))AU(L,M)) \\
&\quad + \frac{1}{H^2}\,(K(L,M+1)AU(L,M+1)+K(L,M)AU(L,M-1) \\
&\qquad -(K(L,M+1)+K(L,M))AU(L,M))
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

donc il y a deux variables L et M et comme on le voit par la figure (5.3) on a les combinaisons suivantes

(1) L< J2 ou M < M4
(2) L > J2 et M > M4
(3) L = J2 et M = M4
(4) L J2 et M = M4
(5) L = J2 et M > M4

si L < J2 ou M < M4

on est dans la région de l'acier inoxydable donc

$$K(L-\frac{1}{2},M) = K(L,M) = K(L+\frac{1}{2},M) = K(1+1,M) = AK$$

$$K(L,M-\frac{1}{2}) = K(L,M) = K(L,M+\frac{1}{2}) = K(L,M+1) = AK$$

donc les équations I et III prennent la même forme et les équations II et IV prennent une autre forme
donc pour I et III on a

$$\frac{BU(L,M)-AU(L,M)}{k} = \frac{AK}{H^2}(AU(L+1,M)+AU(L-1,M)+AU(L,M+1)+AU(L,M-1) -4AU(L,M)) + \frac{AK}{rH}(AU(L+1,M)-AU(L,M)) \quad (5.9)$$

et pour II et IV

$$\frac{BU(L,M)-AU(L,M)}{k} = \frac{AK}{H^2}((AU(L+1,M)+AU(L-1,M)+AU(L,M+1)+AU(L,M-1) -4AU(L,M))) + \frac{AK}{2Hr}(AU(L+1,M)-AU(L-1,M)) \quad (5.10)$$

si L L >J2 et M > M4

on est dans la région de l'oxyde de magnésium

$$K(L-\frac{1}{2},M) = K(L,M) = K(L+\frac{1}{2},M) = K(L+1,M) = BK$$

$$K(L,M-\tfrac{1}{2}) = K(L,M) = K(L,M+\tfrac{1}{2}) = K(L,M+1) = BK$$

donc on a les mêmes équations mais avec BK à la place de AK

pour I et III on a

$$\frac{BU(L,M)-AU(L,M)}{k} = \frac{BK}{H^2}\,(AU(L+1,M)+AU(L-1,M)+AU(L,M+1)+AU(L,M-1) -4AU(L,M)) + \frac{BK}{Hr}(AU(L+1,M)-AU(L,M)) \qquad (5.11)$$

et pour II et IV on a

$$\frac{BU(L,M)-AU(L,M)}{k} = \frac{BK}{H^2}(AU(L+1,M)+AU(L-1,M)+AU(L,M+1)+AU(L,M-1) -4AU(L,M)) + \frac{BK}{2Hr}\,(AU(L+1,M)-AU(L-1,M)) \qquad (5.12)$$

si L = J2 et M = M4

on a $K(L-\tfrac{1}{2},M) = AK$, $K(L,M) = \frac{3AK+BK}{4}$

$$K(L+\tfrac{1}{2},M) = K(L+1,M) = \frac{AK+BK}{2}$$

$$K(L,M-\tfrac{1}{2}) = AK$$

$$K(L,M+\tfrac{1}{2}) = K(L,M+1) = \frac{AK+BK}{2}$$

donc l'équation 1 prend la forme

$$\frac{BU(L,M)-AU(L,M)}{k} = \frac{1}{H^2}\left(\left(\frac{AK+BK}{2}\right)(AU(L+1,M)+AU(L-1,M)+AU(L,M+1) +AU(L,M-1)-(3AK+BK)AU(L,M)) + \frac{AK+BK}{2Hr}\,(AU(L+1,M)-AU(L,M)) \qquad (5.13)$$

et l'équation II prend la forme

$$\frac{BU(L,M)-AU(L,M)}{k} = \frac{1}{H^2}\left(\frac{AK+BK}{2}\,(AU(L+1,M)+AU(L,M+1))\right.$$
$$+AK(AU(L-1,M)+AU(L,M-1))$$
$$\left.-(3AK+BK)AU(L,M)\right)$$
$$+\frac{1}{2Hr}\left(\frac{AK+BK}{2}\,AU(L+1,M)-AK\;AU(L-1,M)\right.$$
$$\left.-\left(\frac{BK-AK}{2}\right)AU(L,M)\right) \qquad (5.14)$$

l'équation III prend la forme

$$\frac{BU(L,M)-AU(L,M)}{k} = \frac{1}{H^2}\left(\left(\frac{AK+BK}{2}\right)(AU(L+1,M)+AU(L,M+1))\right.$$
$$+\left(\frac{3AK+BK}{4}\right)(AU(L-1,M)+AU(L,M-1))$$
$$-\frac{(5AK+3BK)}{2}\,AU(L,M))$$
$$\left.+\left(\frac{AK+BK}{2Hr}\right))(AU(L+1,M)-AU(L,M))\right. \qquad (5.15)$$

et l'équation IV prend la forme

$$\frac{BU(L,M)-AU(L,M)}{k} = \frac{1}{H^2}\left(\left(\frac{AK+BK}{2}\right)(AU(L+1,M)+AU(L,M+1))\right.$$
$$+\frac{(3AK+BK)}{4}(AU(L-1,M)+AU(L,M-1))$$
$$-\frac{(5AK+3BK)}{2}AU(L,M))$$
$$+\frac{1}{2Hr}\left(\frac{(AK+BK)}{2}AU(L+1,M)-\frac{(3AK+BK)}{4}AU(L-1,M)\right.$$
$$\left.-\frac{(BK-AK)}{4}AU(L,M)\right) \qquad (5.16)$$

si L > J2 et M=M4 on a

$$K(L-\frac{1}{2},M) = K(L,M) = K(L+\frac{1}{2},M) = K(L+1,M) = \frac{AK+BK}{2}$$

$$K(L,M-\frac{1}{2}) = AK$$

$$K(L,M+\frac{1}{2}) = K(L,M+1) = BK$$

les quatre équations prennent les formes suivantes :

pour l'équation I

$$\frac{BU(L,M)-AU(L,M)}{k} = \frac{(AK+BK)}{2H^2}(AU(L+1,M)+AU(L-1,M)-2AU(L,M)) + \frac{(AK+BK)}{2Hr}(AU(L+1,M)-AU(L,M)) + \frac{1}{H^2}(AU(L,M+1)BK+AU(L,M-1)AK - (AK+BK)AU(L,M)) \quad (5.17)$$

et pour l'équation II on a

$$\frac{BU(L,M)-AU(L,M)}{k} = \frac{(AK+BK)}{2H^2}(AU(L+1,M)+AU(L-1,M)-2AU(L,M)) + \frac{(AK+BK)}{4Hr}(AU(L+1,M)-AU(L-1,M)) + \frac{1}{H^2}(AU(L,M+1)BK+AU(L,M-1)AK - (AK+BK)AU(L,M)) \quad (5.18)$$

et pour l'équation III on a

$$\frac{BU(L,M)-AU(L,M)}{k} = \frac{(AK+BK)}{2H^2}(AU(L+1,M)+AU(L-1,M)-2AU(L,M)) + \frac{(AK+BK)}{2Hr}(AU(L+1,M)-AU(L,M)) + \frac{1}{H^2}(AU(L,M+1)BK + \frac{(AK+BK)}{2}AU(L,M-1) - \frac{(AK+3BK)}{2}AU(L,M)) \quad (5.19)$$

et l'équation IV

$$\frac{BU(L,M)-AU(L,M)}{k} = \frac{(AK+BK)}{2H^2}(AU(L+1,M)+AU(L-1,M)-2AU(L,M)) + \frac{(AK+BK)}{4Hr}(AU(L+1,M)-AU(L-1,M)) + \frac{1}{H^2}(AU(L,M+1)BK + \frac{(AK+BK)}{2}AU(L,M-1) - \frac{(AK+3BK)}{2}AU(L,M)) \quad (5.20)$$

si L = J2 et M4 > M4
on a

$$K(L-\tfrac{1}{2},M) = AK \quad , \quad K(L,M) = \frac{AK+BK}{2}$$

$$K(L+\tfrac{1}{2},M) = K(L+1,M) = BK$$

$$K(L,M-\tfrac{1}{2}) = K(L,M) = K(L,M+\tfrac{1}{2}) = K(L,M+1) = \frac{AK+BK}{2}$$

on a les quatre formes suivantes pour les quatre équations

Equation 1

$$\frac{BU(L,M)-AU(L,M)}{k} = \frac{1}{H^2}(AU(L+1,M)BK + AU(L-1,M)AK - (AK+BK)AU(L,M)) + \frac{BK}{Hr}(AU(L+1,M) - AU(L,M)) + \frac{(AK+BK)}{2H^2}(AU(L,M+1) + AU(L,M-1) - 2AU(L,M)) \quad (5.21)$$

Equation II

$$\frac{BU(L,M)-AU(L,M)}{k} = \frac{1}{H^2}(AU(L+1,M)BK + AU(L-1,M)AK - (AK+BK)AU(L,M)) + \frac{1}{2Hr}(AU(L+1,M)BK - AU(L-1,M)AK - (BK-AK)AU(L,M)) + \frac{(AK+BK)}{2H^2}(AU(L,M+1) + AU(L,M-1) - 2AU(L,M)) \quad (5.22)$$

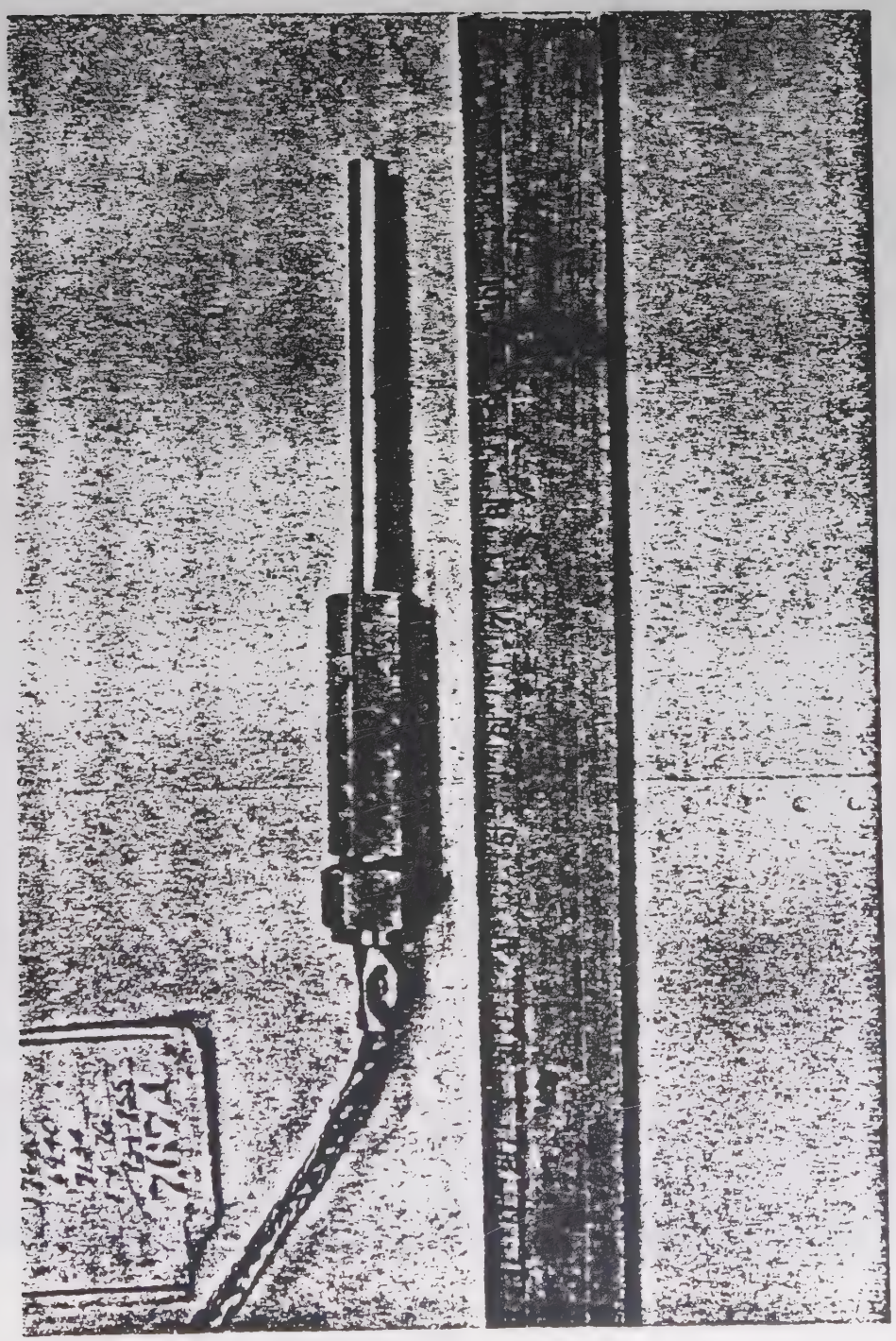
l'équation III prend la forme

$$\frac{BU(L,M)-AU(L,M)}{k} = \frac{1}{H^2}(AU(L+1,M)BK + AU(L-1,M)\frac{(AK+BK)}{2} - \frac{(AK+3BK)}{2}AU(L,M)) + \frac{BK}{Hr}(AU(L+1,M)-AU(L,M)) + \frac{(AK+BK)}{2H^2}(AU(L,M+1) + AU(L,M-1)-2AU(L,M)) \quad (5.23)$$

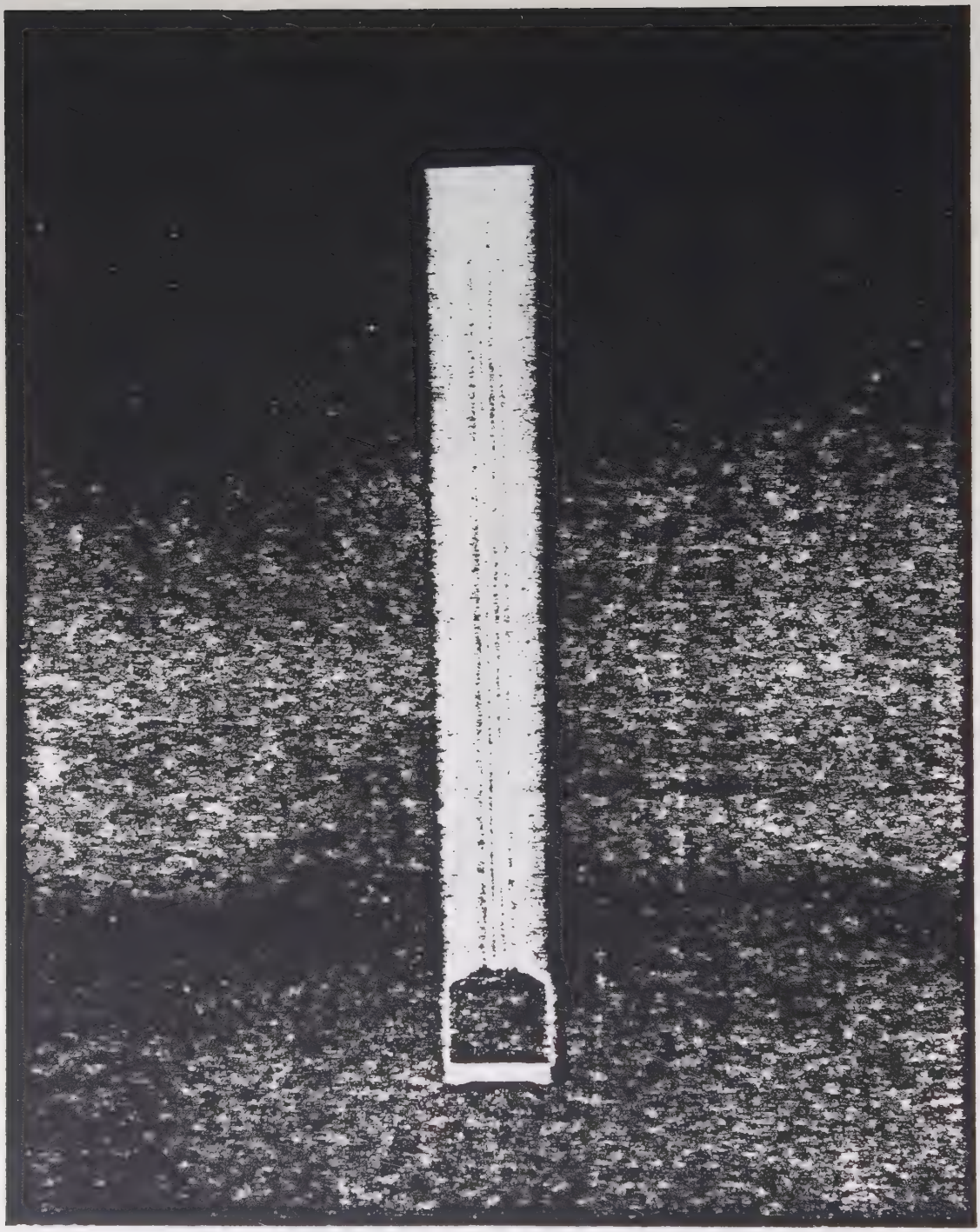
L'équation IV prend la forme

$$\frac{BU(L,M)-AU(L,M)}{k} = \frac{1}{H^2}(AU(L+1,M)BK + \frac{(AK+BK)}{2}AU(L-1,M) - \frac{(AK+3BK)}{2}AU(L,M)) + = \frac{1}{2Hr}(AU(L+1,M)BK - \frac{(AK+BK)}{2}AU(L-1,M) - \frac{(BK-AK)}{2}AU(L,M)) + \frac{(AK+BK)}{2H^2}(AU(L,M+1) + AU(L,M-1) -2AU(L,M)) \quad (5.24)$$

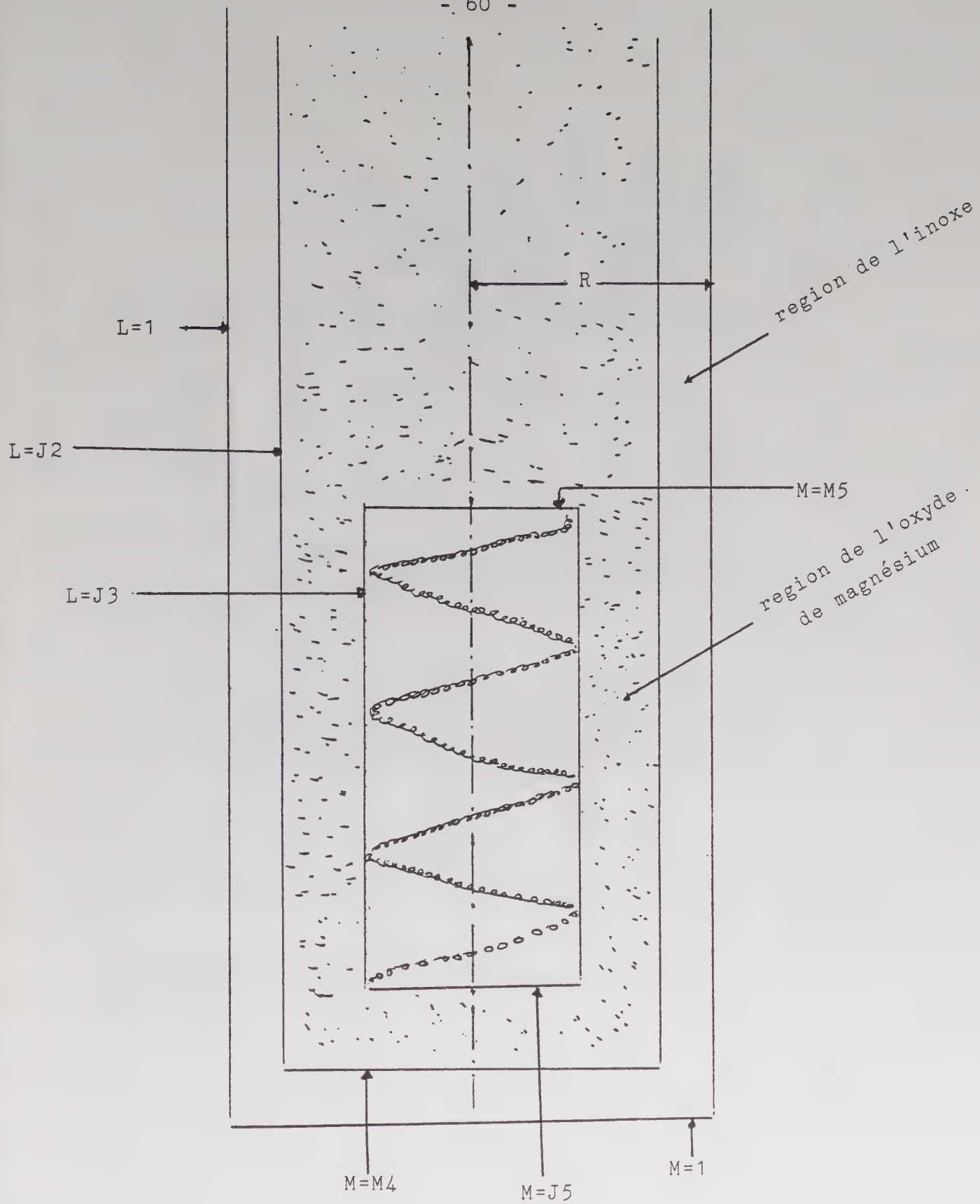
Pour les cas
L = J2 et M = M4, L > J2 et M = M4 , L = J2 et M > M4
on fait la somme des quatre équations et en divisant par quatre on a la moyenne de $\frac{BU(L,M) - AU(L,M)}{K}$ sur la frontière entre la région de l'acier inoxydable et la région de l'oxyde de magnésium.



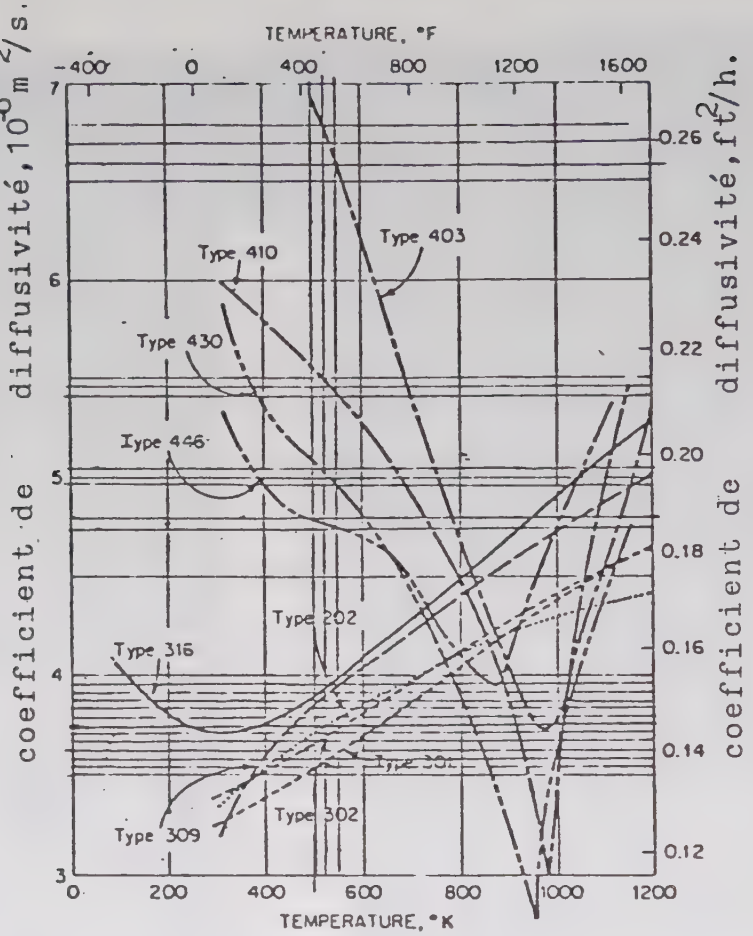
figure(5.1) Une photo de capteur 176-KF



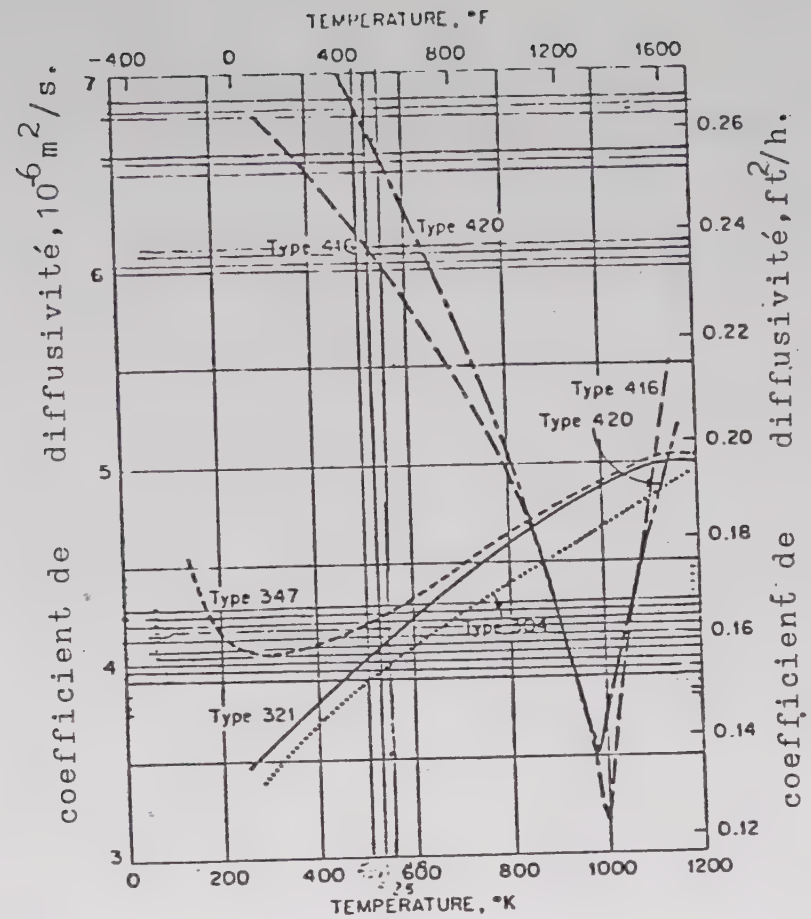
figure(5.2) Photo prise aux rayons X d'un capteur 176-KF



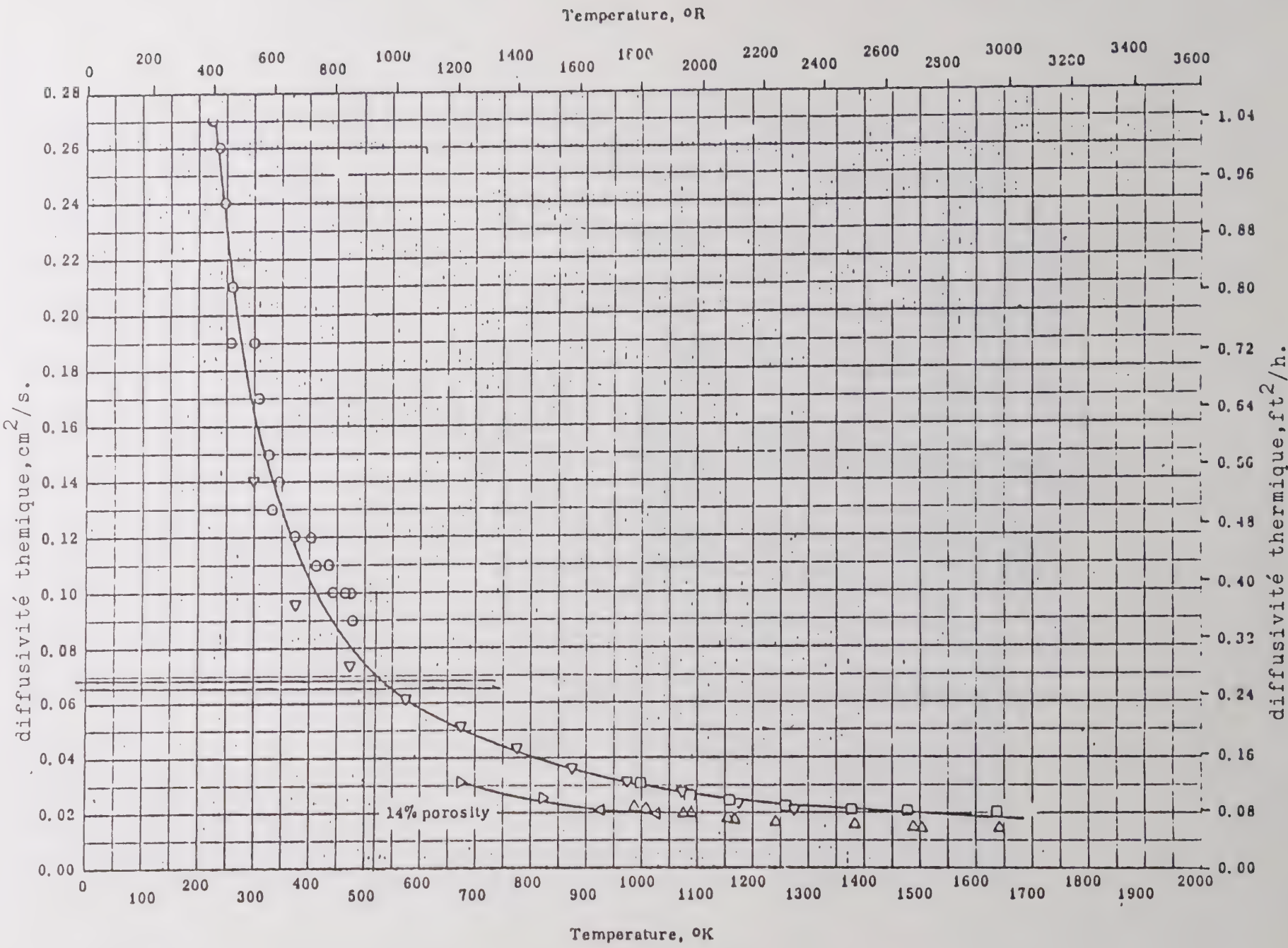
figure(5.3) initialisation de differents points du capteur



figure(5·4) Variation du coefficient de diffusivite de différents types d'acier avec la température



figure(5·5)Variation du coefficient de diffusivite de différents types d'acier avec la température



figure(5.6) Diffusité thermique d'oxyde de magnésium.

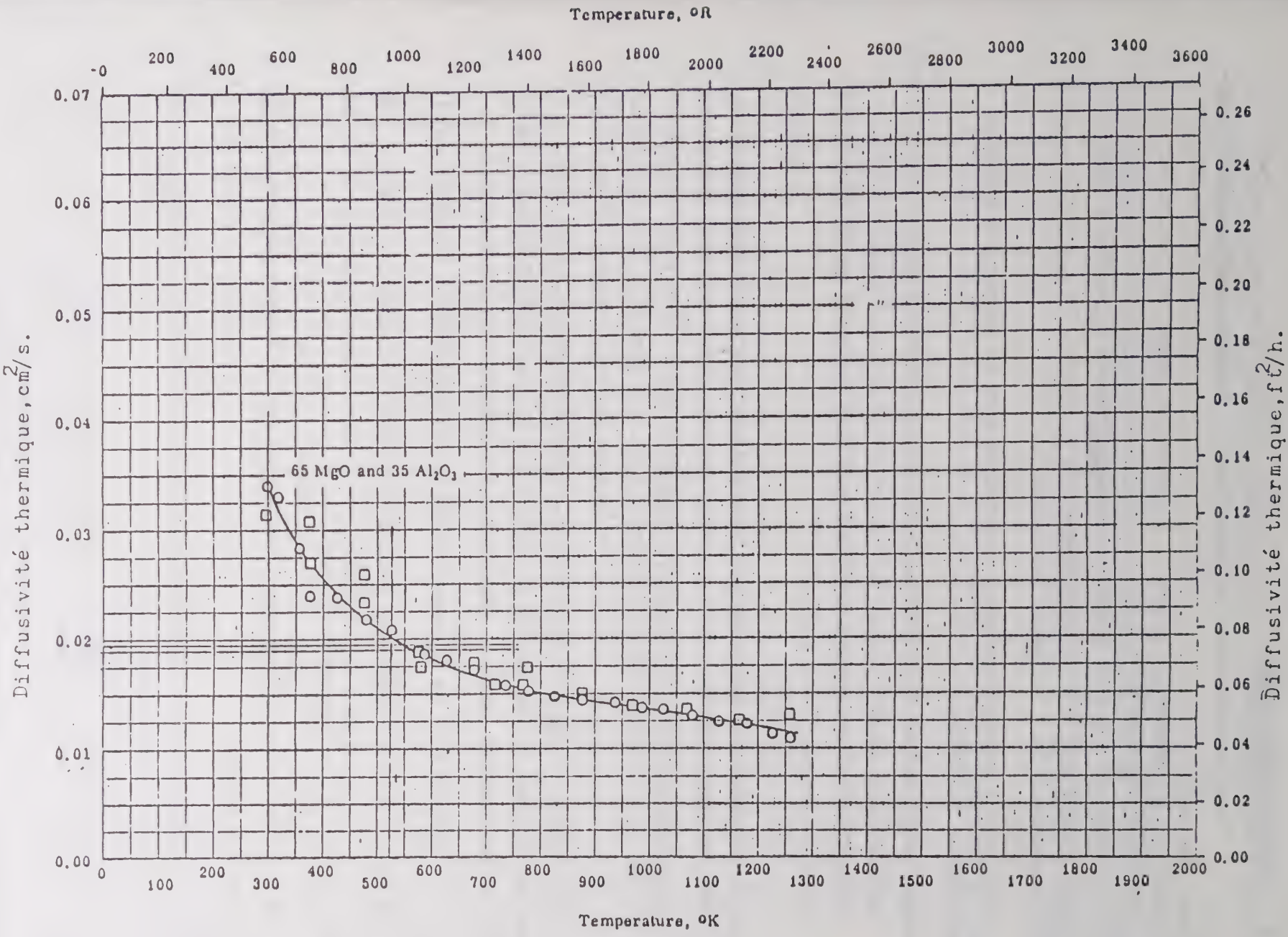


fig 15.7 : Diffusivité thermique d'oxyde de magnésium +oxyde d'aluminium.

5.2 - LA PROGRAMMATION

Pour programmer le problème il faut connaître les paramètres suivants :

I Le rayon du capteur R

II La position de son élément sensible c'est-à-dire sa position par rapport à l'axe du capteur

III La hauteur de l'élément sensible

Ces trois paramètres sont calculés sur la photo du capteur aux rayons x figure (5.2).

IV Les coefficients de diffusivité de l'inoxe et de i'oxyde de magnésium AK et BK

Ces coefficients sont obtenus par les courbes de diffusivité /23/ figures (5.4) à (5.7)

V La température initiale Uo (pour les réacteurs nucléaires U_o est environ 280°C.

On commence la programmation par :

1. Dimensionner les tableaux BU et AU, ils ont la même dimension. Comme la capacité du SOLAR 16-65 est de 32 Kmots. On fait attention de ne pas dépasser la capacité de la machine.

2. Choisir K et H pour vérifier la condition de stabilité

$$K \leq \frac{H^2}{5\ C}$$

où C est le plus grand de AK et BK

3. Calculer la fonction TAMP qui donne la température à la surface du capteur.

4. Initialiser tous les points intérieurs de la maille par la température initiale Uo.

5. Calculer la température BU de chaque point et à la fin du calcul on remplace AU par BU et on itère ce calcul jusqu'à ce qu'on approche de la température d'équilibre qui est égale à la température du liquide près de la surface du capteur.

6. On calcule dans chaque étape de (5) la température moyenne de l'élément sensible.

7. Calculer le temps de réponse : c'est le temps où la température moyenne de l'élément sensible atteint 63.2% de la différence (U1 - U0) où U1 est la température à la surface du capteur c'est-à-dire la température du liquide et U0 est la température initiale.

8. Sortie des résultats sur imprimante ou sur écran cathodique.

Maintenant on étudie la sensibilité du temps de réponse aux différents paramètres comme le rayon R du capteur. Les coefficients de diffusivité AK , BK , la hauteur de l'élément sensible

1. La relation entre le temps de réponse et le diamètre du capteur pour changer le rayon du capteur, il est préférable d'écrire le rayon comme étant une fonction de H et de changer H, ainsi la proportion de la position de l'élément sensible par rapport au diamètre du capteur reste inchangée.

On constate (figure(5.8) et (5.9)) que le temps de réponse croît comme R^2 on a :

$$\frac{\tau_1}{\tau_1} = \frac{D_1^2}{D_1^2}$$

où τ_1 est le temps de réponse quand le diamètre est R_1 et τ_2 est le temps de réponse quand le diamètre est R_2.

Ce résultat est identique à celui obtenu par THOMSON /17/ dans son étude de la relation entre le diamètre de capteur et le temps de réponse.

2. La relation entre le temps de réponse et la hauteur de l'élément sensible.

On commence par une petite hauteur de l'élément sensible et on augmente itérativement cette hauteur d'une valeur constante.

On constate qu'avec une petite hauteur le temps de réponse est petit et quand on augmente cette hauteur, le temps de réponse augmente. Mais au-delà d'une certaine hauteur le temps de réponse reste inchangé. C'est-à-dire que la sensibilité au

changement est forte au premier changement par rapport au deuxième, la sensibilité du deuxième est plus forte que la troisième et au-delà d'une hauteur égale à peu près à 3 fois le diamètre du capteur, le temps de réponse reste inchangé.

La figure (5.10) montre la relation entre le temps de réponse et la hauteur de l'élément sensible.

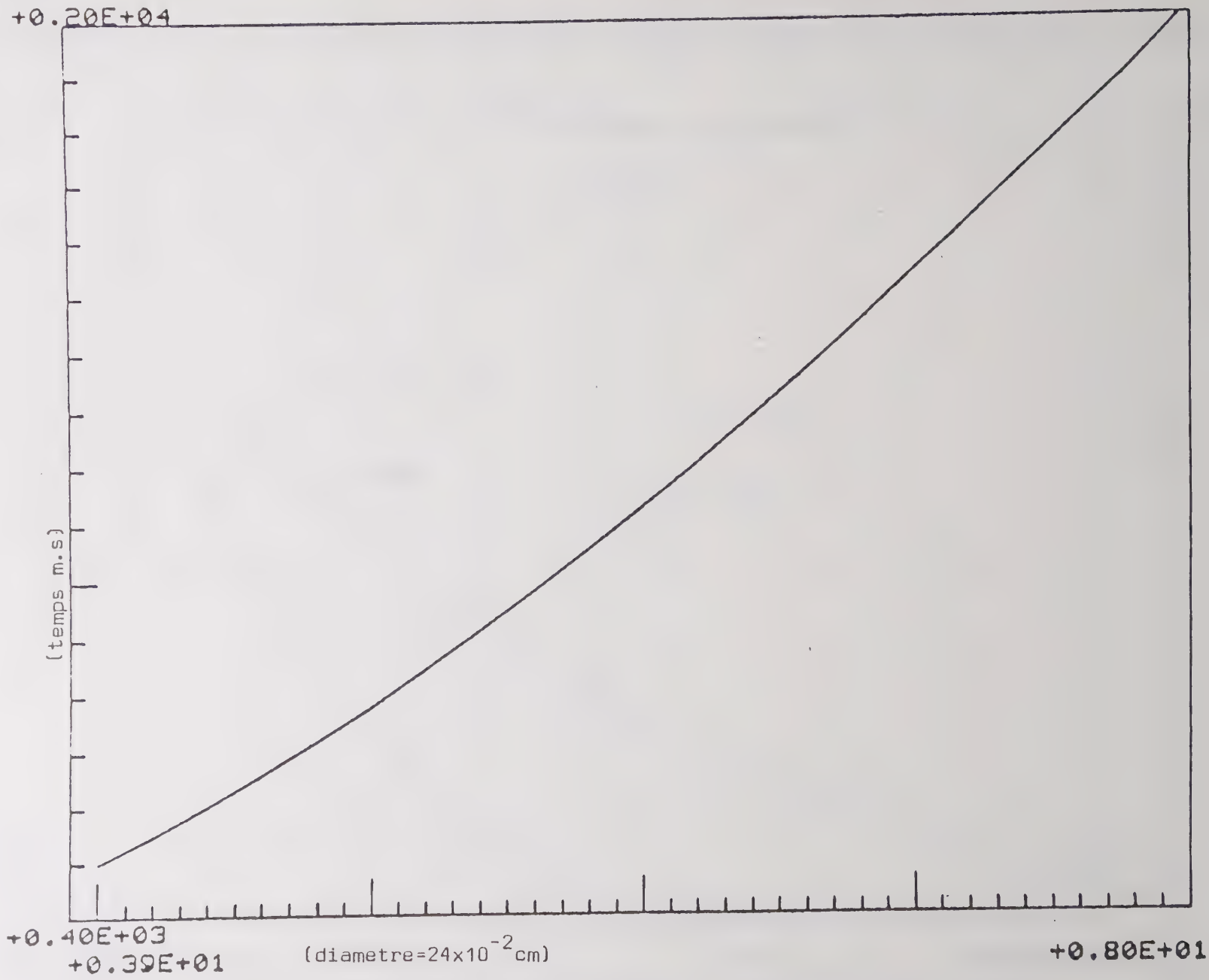
La figure (5.11) montre le temps de réponse pour deux hauteurs différentes.

3. La relation entre le temps de réponse et les coefficients de diffusivité

On constate qu'il y a une relation presque linéaire entre le temps de réponse et le coefficient de diffusivité dans chaque région du capteur. La figure (5.6) donne la relation entre la diffusivité de l'oxyde de magnésium et la température ; on constate que la diffusivité de l'oxyde de magnésium diminue sensiblement avec la température. Par exemple le coefficient de la diffusivité est égal à 0.175 cm^2/s pour une température de 20°C et ce coefficient est égal à 0.06 cm^2/s pour une température de 300°C. Donc pour le capteur 176-KF où l'élément sensible est à une distance égale à peu près à deux fois l'épaisseur de l'oxyde de magnésium, égale à l'épaisseur de l'inox, le temps de réponse pour une température de 300°C est égal environ au double du temps de réponse pour une température de 20°C. Pour des capteurs où l'élément sensible est au centre du capteur. C'est-à-dire où l'épaisseur de l'oxyde de magnésium est plus grande que l'épaisseur de l'inox le temps de réponse pour une température de 300°C est presque trois fois le temps de réponse pour une température de 20°C.

La figure (5.12) donne l'évolution de la température avec le temps.

La figure (5.13) donne le changement du temps de réponse en fonction de la température (c'est-à-dire en fonction du coefficient de diffusivité



figure(5.8)Relation entre le temps de reponse et le diametre du capteur

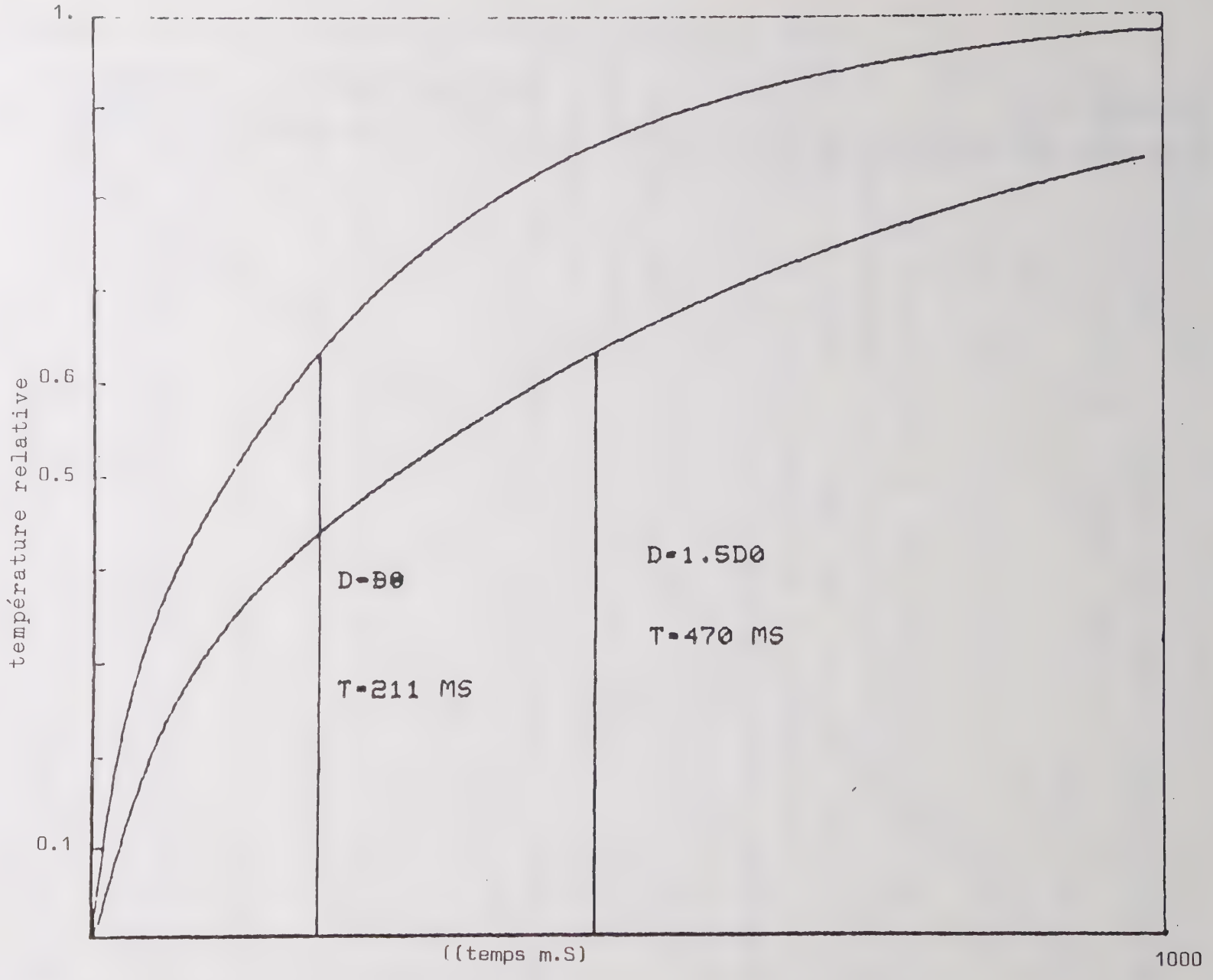
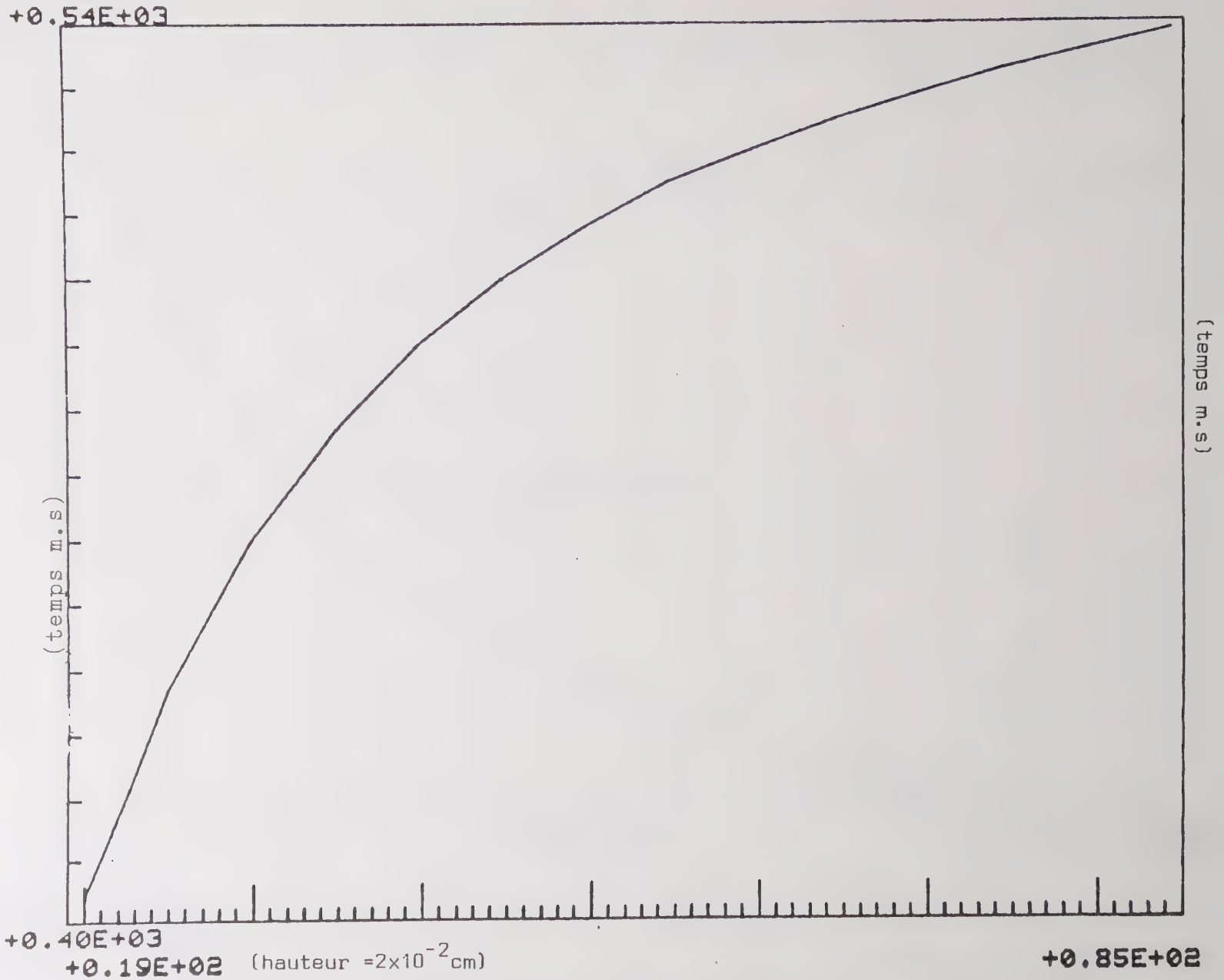
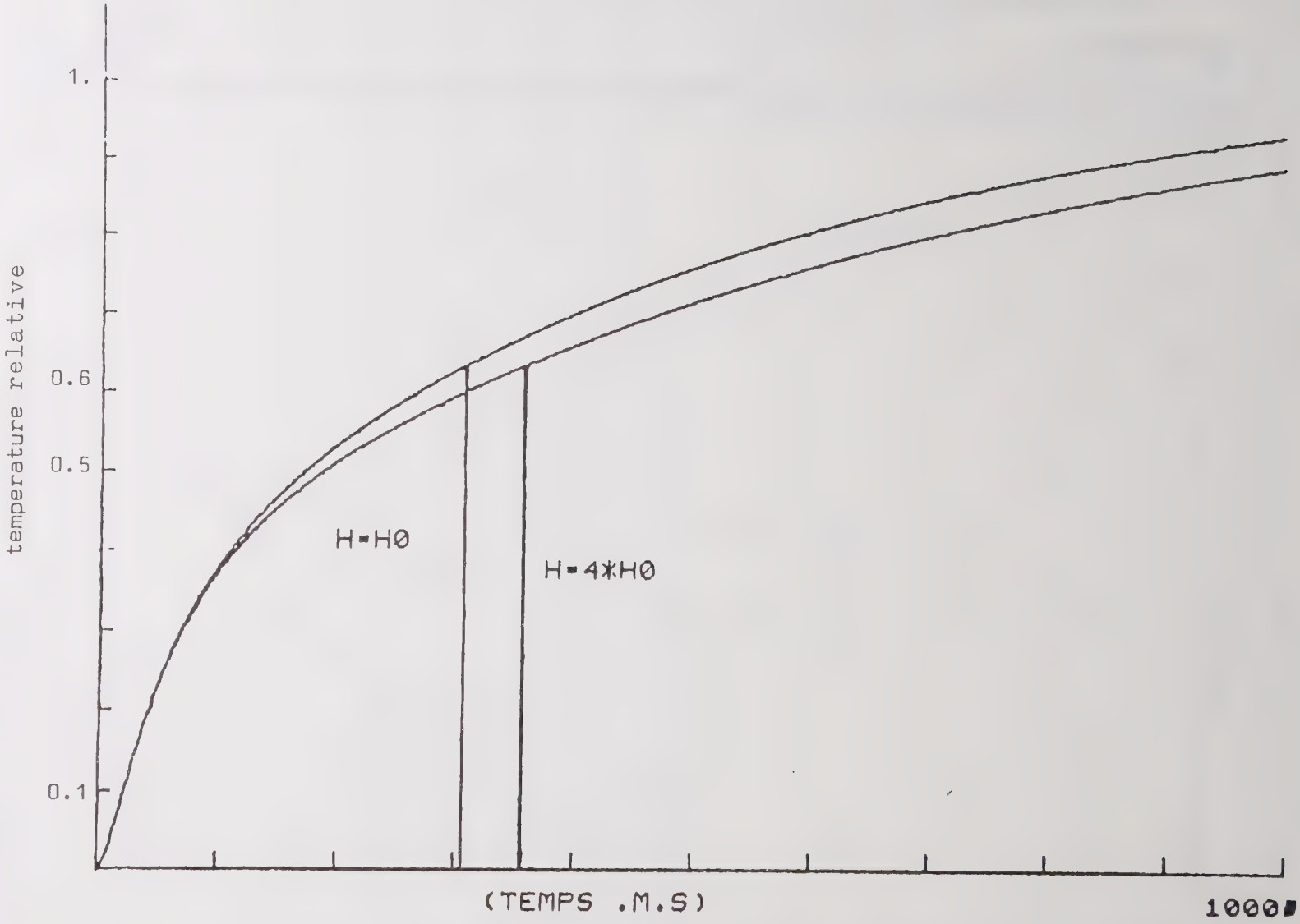


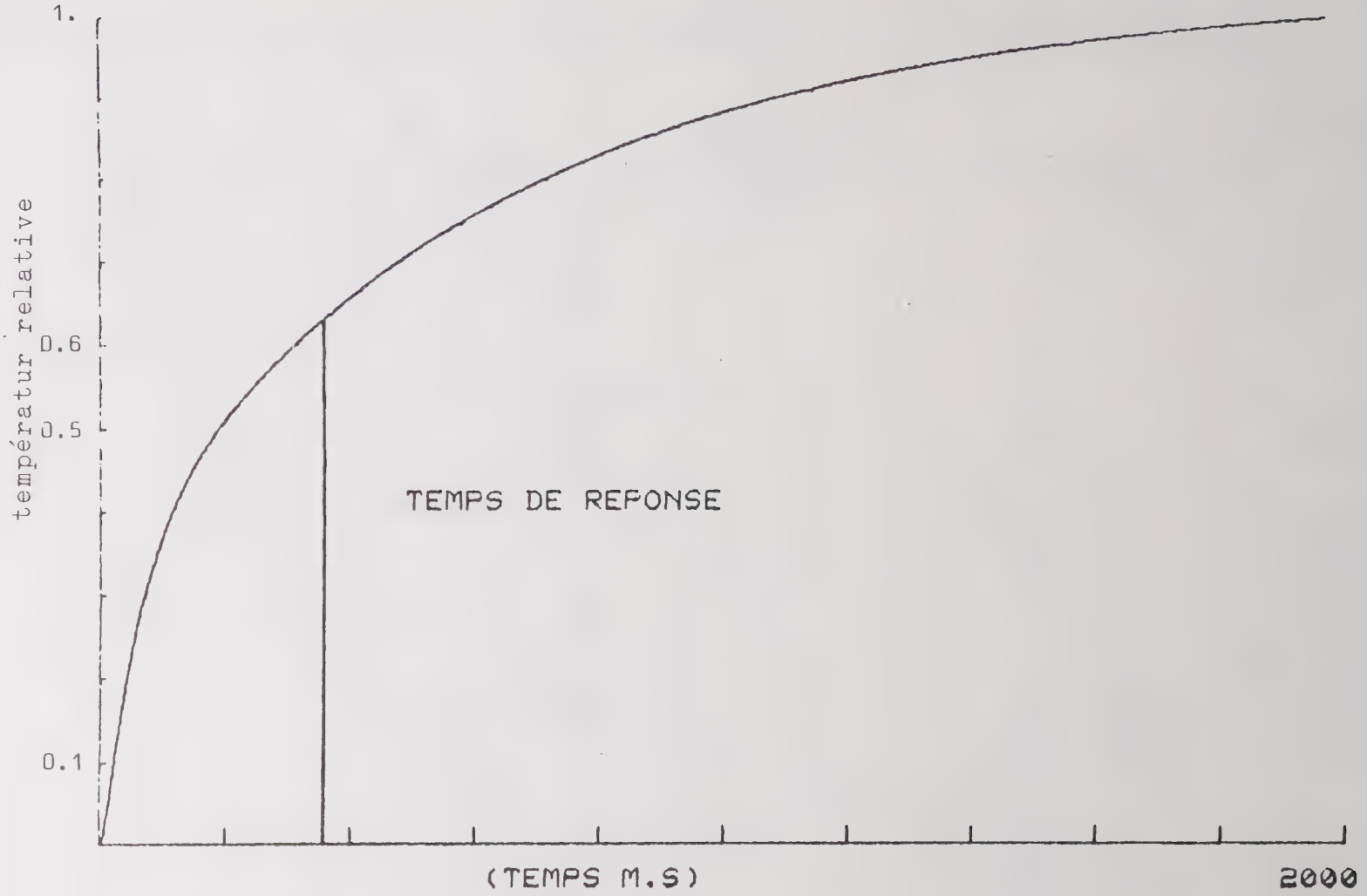
figure (5.9) Changement de temps de réponse en fonction de diamétre du capteur



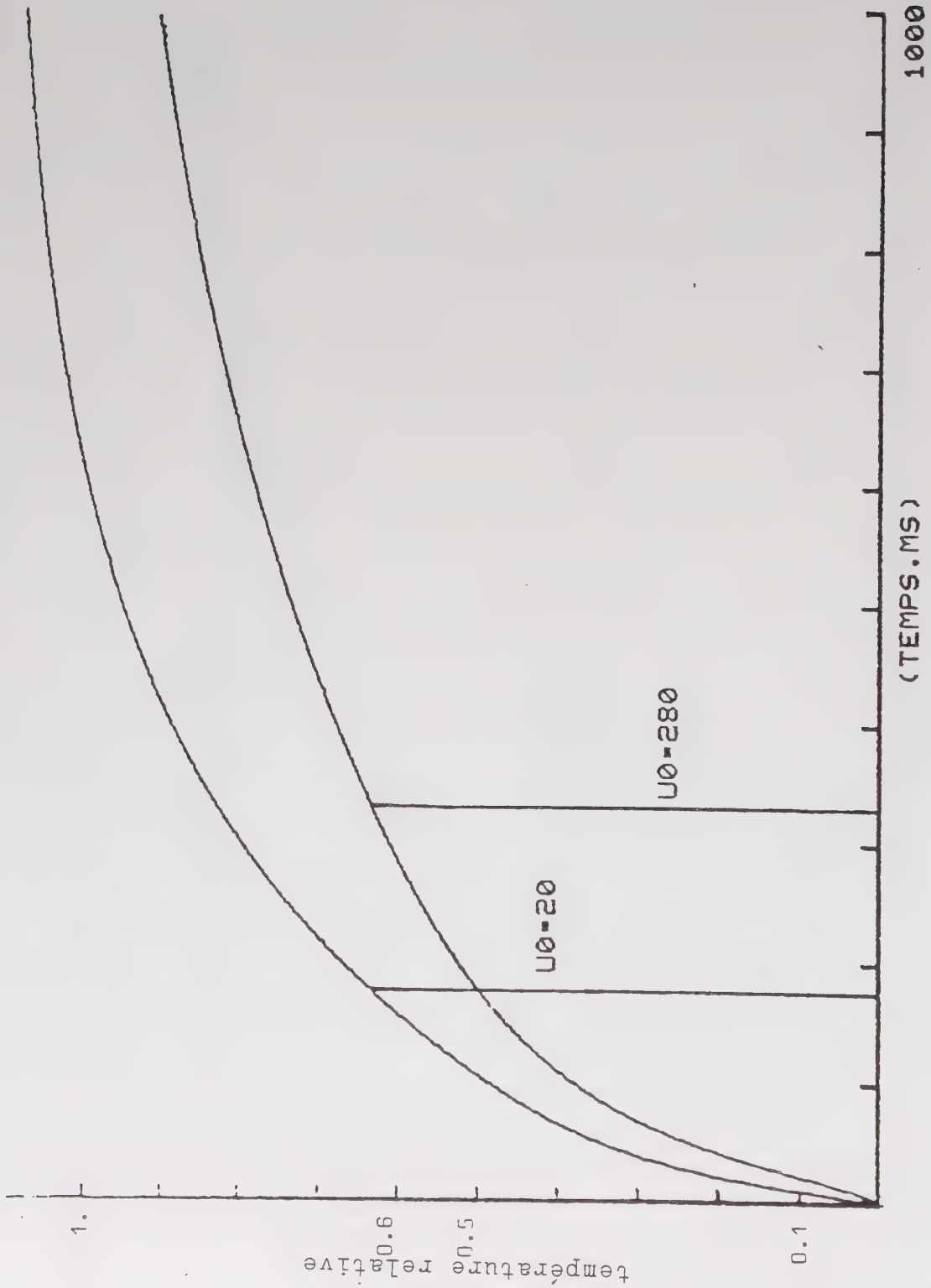
figure(5.10) Relation entre le temps de reponse et la hauteur l'element sensible



figure(5.11) Changement de temps de réponse en fonction de la hauteur de l'élément sensible



figure(5.12) Evolution de la température avec le temps



figure(5.13) Changement de temps de réponse en fonction de la température

RESULTATS

On donne ici quelques résultats obtenus par les autres méthodes. On constate qu'il y a beaucoup de différences entre ces méthodes.

	TEMPS DE REPONSE
EXPERIENCE A SACLAY	170 ms
EXPERIENCE A E.D.F	170 ms

ANALYSE DE BRUIT

	TEMPS DE REPONSE	
DATE	BRANCHE CHAUDE	BRANCHE FROIDE
20.2.79	270 ms	420 ms
30.1.80	260 ms	440 ms
14.10.80	250 ms	430 ms

TEST DE PLONGEE	370 $\pm$ 20 ms
BOUCLE DE COURANT	310 $\pm$ 20 ms

RESULTATS DE MODELE MATHEMATIQUE

TEMPERATURE	TEMPS DE REPONSE
30 °C	175 ms
280 °C	330 ms

CONCLUSION

On constate que le temps de réponse dépend de trois paramètres. Le premier est la hauteur de l'élément sensible. Ce paramètre ne change pas beaucoup le temps de réponse, car après une certaine hauteur le temps de réponse reste inchangé. On peut expliquer ce cas par le fait que le transfert de chaleur se fait dans une seule dimension après une certaine hauteur. Le deuxième paramètre est le diamètre du capteur Ce paramètre est le plus important parmi les trois car le temps de réponse change en fonction de R^2 et ce résultat est identique à celui obtenu par THOMSON dans son étude de la relation entre le temps de réponse et le diamètre du capteur. Le trosième paramètre est le coefficient de diffusivité : ce paramètre est très important aussi car il y a une relation linéaire entre le temps de réponse et le coefficient de diffusivité et on constate que le coefficient de diffusivité (figure 5.8) de l'oxyde de magnésium diminue sensiblement avec la température donc les autres méthodes donnent un temps de réponse plus petit que le vrai temps de réponse sur un réacteur nucléaire et enfin notre modèle donne un temps de réponse dans la fourchette des résultats donnés par les autres méthodes, par exemple notre modèle donne un temps de réponse de 175 ms pour une température de 20°C. Dans une expérience faite à SACLAY on a un temps de réponse de 170 ms, le même temps est obtenu à l'E.D.F. mais notre modèle donne un temps de réponse de 330 ms pour une température de 280°C.

DESCRIPTION DE L'ORDINATEUR

L'ordinateur sur lequel le calcul est fait est un solar 16.65 de la société SEMS. Il est équipé des périphériques suivants :

- un téléimprimeur TELETYPE ASR 33
- une console de visualisation TEKTRONIX 4012
- un reprographe TEKTRONIX 4631
- un lecteur de cartes
- une unité de disques durs (5 MO fixe, 5 MO mobile)
- deux unités de bandes magnétiques
- une imprimante semi rapide LOGABAX

La capacité mémoire est de 32 K mots de 16 bits. L'ordinateur est équipé d'un module arithmétique flottant câblé qui effectue une addition en 750 ms.

```
      EXTERNAL  TAMP
      DIMENSION AU(40,100),BU(40,100)
      COMMON/COM/UO
      CALL INITT(1)
      READ(7,*)  LG
      DO1001  L=1,LG
       READ(7,*) Q1,Q2,Q3,Q4,G1,G2,G3,G4,AZ
      READ(7, *)     L1,M1,J2,J3,J4,NT,H,T,M4,M5,J5 ,R,AK,BK,L3,UO
       F2=Q2/G2
       F3=Q3/G3
       F1=Q1/G1
       F4=Q4/G4
      CART=0
      CART=CART+L
      WRITE(8,202)  L1,M1,J2,J3,J4,M4,M5,H,T,R    ,AK,BK ,UO
      CALL  TEMR(TAMP,H,T,BU,NT,L1,M1,J2,J3,J4,J5,M4,M5,R,AU ,AK,BK,L3,
     *UO,F1,F2,F3,F4,AZ)
1001  CONTINUE
      STOP
202   FORMAT(1H ,7I5,5E15.9/)
      END
```

```
                        FUNCTION TAMP(J)
      COMMON/COM/UO
      TAMP=UO+10
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE  TEMR(TAMP,H,T,BU,NT,L1,M1,J2,J3,J4,J5,M4,M5,R,AU,AK,
     2BK,L3,U0,F1,F2,F3,F4,AZ)
      DIMENSION AU(L1,M1), BU(L1,M1)
       C=AK*T/(H*H)
       C1=AK*T/H
       C2=AK*T/(H*H*AZ*AZ)
       C3=(AK+BK)*T/(2*H*H)
       C4=(3*AK+BK)*T/(4*H*H)
       C5=(5*AK+3*BK)*T/(4*H*H)
C
       C6=(AK+BK)*T/(2*H)
       C7=(AK+BK)*T/(2*H*H*AZ*AZ)
       C8=(3*AK+BK)*T/(4*H*H*AZ*AZ)
       C9=(5*AK+3*BK)*T/(4*H*H*AZ*AZ)
       C10=BK*T/(H*H*AZ*AZ )
       C11=(3*BK+AK)*T/(2*H*H*AZ*AZ)
       C12=BK*T/(H*H)
       C13=(3*BK+AK)*T/(2*H*H)
C
       C14=BK*T/H
       C15=(3*AK+BK)*T/(2*H*H)
       C16=(AK+BK)  *T/(4*H*H)
       C17=AK*T/(2*H)
       C18=(3*AK+BK)*T/(2*H*H*AZ*AZ)
       C20=(AK+BK)*T/(H*H*AZ*AZ)
C
      C19=(BK-AK)*T/(40*H)
      C23=(BK-AK)*T/(20*H)
      C26=(BK-AK)*T/(80*H)
       C21=(AK+BK)*T/(H*H)
       C22=BK*T/(2*H)
       C24=(AK+BK)*T/(4*H)
       C25=(3*AK+BK)*T/(8*H)
      L2=L1-1
      M2=M1-1
      L4=L3-2
      M3=M1-2
      DO1    J=2,M2
      DO1     K=1,L2
      BU(1,J)=TAMP(J)
      AU(1,J)=TAMP(J)
      BU(K,1)=TAMP(J)
      AU(K,1)=TAMP(J)
1      CONTINUE
      DO3    K=2,M2
      DO3     I=2,L2
3     AU(I,K)=U0
      B=NT
      DP=U0-2
      AR=TAMP(J)+1
      CALL DWINDO(0.,B,DP,AR)
      CALL MOVEA(0.,U0)
      DO1000    I=1,11
      I1=I-1
```

```
      X=0
      Y=U0
      PX=NT/10
      X=X+PX*I1
       Z=Y+0.2
      CALL  DRAWA(X,Y)
      CALL DRAWA(X,Z)
      CALL MOVEA(X,Y)
1000    CONTINUE
      CALL MOVEA(0.,U0)
      DO2000   I2=1,11
      I3=I2-1
      X1=0
      PX=NT/10
      PY=ABS(TAMP(J)-U0)/10
      Y1=U0
       Y1=Y1+I3*PY
      X=10.
       CALL  DRAWA(X1,Y1)
      CALL DRAWA(X,Y1)
      CALL MOVEA(X1,Y1)
2000  CONTINUE
      DO2   N=1,NT
      S=0
      DO4     L=2,L3
      DO4     M=2,M3
      AU(L,M3+1)=AU(L,M3)
      AU(L3-1,M)=AU(L3-2,M)
      AU(L3,M)=AU(L3-1,M)
      AU(L3+1,M)=AU(L3,M)
C
C
       IF(M-M4) 10,20,30
10     B1=AU(L,M)
       B2=C*(AU(L+1,M)+AU(L-1,M)-2*AU(L,M))
       B3=C1*(AU(L+1,M)-AU(L,M))/((L1-L)*H)
       B4=C2*(AU(L,M+1)+AU(L,M-1)-2*AU(L,M))
       BU(L,M)=B1+B2+B3+B4
      GOTO4
C
C
20    IF(L-J2)   10,40,60
40     B1=AU(L,M)
C
       B5=C3*AU(L+1,M)+C4*AU(L-1,M)-C5*AU(L,M)
       B6=C6*(AU(L+1,M)-AU(L,M))/(H*(L1-L))
       B7=C7*AU(L,M+1)+C8*AU(L,M-1)-C9*AU(L,M)
C
C
       B51=C3*AU(L+1,M)+C*AU(L-1,M)-C15*AU(L,M)
       B61=(C16*AU(L+1,M)-C17*AU(L-1,M)-C19*AU(L,M))/(H*(L1-L))
       B71=C7*AU(L,M+1)+C2*AU(L,M-1)-C18*AU(L,M)
C
```

```
C
      B52=C3*AU(L+1,M)+C*AU(L-1,M)-C15*AU(L,M)
      B62=C6*(AU(L+1,M)-AU(L,M))/(H*(L1-L))
      B72=C7*AU(L,M+1)+C2*AU(L,M-1)-C18*AU(L,M)
C
C
      B53=C3*AU(L+1,M)+C4*AU(L-1,M)-C5*AU(L,M)
      B63=(C24*AU(L+1,M)-C25*AU(L-1,M)-C26*AU(L,M))/(H*(L1-L))
      B73=C7*AU(L,M+1)+C8*AU(L,M-1)-C9*AU(L,M)
C
C
      BU(L,M)=B1+F1*(B5+B6+B7)+F2*(B51+B61+B71)+F3*(B52+B62+B72)+F4*(
     5B53+B63+B73)
      GOTO4
60    B1=AU(L,M)
C
      B8=C3*(AU(L+1,M)+AU(L-1,M)-2*AU(L,M))
      B9=C6*(AU(L+1,M)-AU(L,M))/(H*(L1-L))
      B10=C10*AU(L,M+1)+C7*AU(L,M-1)-C11*AU(L,M)
C
C
C
      B81=C3*(AU(L+1,M)+AU(L-1,M)-2*AU(L,M))
      B91=C16*(AU(L+1,M)-AU(L-1,M))/(H*(L1-L))
      B101=C10*AU(L,M+1)+C2*AU(L,M-1)-C20*AU(L,M)
C
C
C
      B82=C3*(AU(L+1,M)+AU(L-1,M)-2*AU(L,M))
      B92=C6*(AU(L+1,M)-AU(L,M))/(H*(L1-L))
      B102=C10*AU(L,M+1)+C2*AU(L,M-1)-C20*AU(L,M)
C
C
C
      B83=C3*(AU(L+1,M)+AU(L-1,M)-2*AU(L,M))
      B93=C16*(AU(L+1,M)-AU(L-1,M))/(H*(L1-L))
      B103=C10*AU(L,M+1)+C7*AU(L,M-1)-C11*AU(L,M)
C
C
      BU(L,M)=B1+F1*(B8+B9+B10)+F2*(B81+B91+B101)+F3*(B82+B92+B102)+F4*
     7(B83+B93+B103)
      GOTO4
30    IF(L-J2) 10,201,301
201   B1=AU(L,M)
C
      B11=C12*AU(L+1,M)+C3*AU(L-1,M)-C13*AU(L,M)
      B12=C14*(AU(L+1,M)-AU(L,M))/(H*(L1-L))
      B13=C7 *(AU(L,M+1)+AU(L,M-1)-2*AU(L,M))
C
C
C
      B111=C12*AU(L+1,M)+C*AU(L-1,M)-C21*AU(L,M)
      B121=(C22*AU(L+1,M)-C17*AU(L-1,M)-C23*AU(L,M))/(H*(L1-L))
```

```
      B131=C7*(AU(L,M+1)+AU(L,M-1)-2*AU(L,M))
C
C
      B113=C12*AU(L+1,M)+C3*AU(L-1,M)-C13*AU(L,M)
      B123=(C22*AU(L+1,M)-C24*AU(L-1,M)-C19*AU(L,M))/(H*(L1-L))
      B133=C7*(AU(L,M+1)+AU(L,M-1)-2*AU(L,M))
      B112=C12*AU(L+1,M)+C*AU(L-1,M)-C21*AU(L,M)
      B122=C14*(AU(L+1,M)-AU(L,M))/(H*(L1-L))
      B132=C7*(AU(L,M+1)+AU(L,M-1)-2*AU(L,M))
      BU(L,M)=B1+F1*(B11+B12+B13)+F2*(B111+B121+B131)+F3*(B112+B122+
     4B132)+F4*(B113+B123+B133)
C
      GOTO4
301   B1=AU(L,M)
C
C
      B14=C12*(AU(L+1,M)+AU(L-1,M)-2*AU(L,M))
      B15=C14*(AU(L+1,M)-AU(L,M))/(H*(L1-L))
      B16=C10*(AU(L,M+1)+AU(L,M-1)-2*AU(L,M))
      BU(L,M)=B1+B14+B15+B16
4     CONTINUE
      DO6   J1=J5,M5
6     S=S+BU(J3,J1)
      S1=S/(M5-J5+1)
      TR=N
      CALL DRAWA(TR,S1)
      DO8    L=1,L3
      DO8   M=1,M3
8     AU(L,M)=BU(L,M)
      REPONS=N*T
      IF(ABS(S1-U0).GT.632./1000*ABS(TAMP(J)-U0))GOTO11
      GOTO2
11    IF(ABS(S1-U0).LT.634./1000*ABS(TAMP(J)-U0))GOTO12
      GOTO2
12    WRITE(8,51) N,R,H,REPONS
      DO3000    K=1,7
      K1=K-1
      TER=N
      Y2=U0
      PX=NT/10
      P=ABS(TAMP(J)-U0)/11
      Y2=Y2+P*K1
      CALL  DRAWA(TER,Y2)
3000  CONTINUE
2     CONTINUE
      CALL MOVEA (0.,AR)
      CALL DRAWA (0.,DP)
      CALL DRAWA (0.,AR)
      CALL DRAWA (0.,DP)
      CALL DRAWA  (0.,AR)
15    RETURN
51    FORMAT(' N=',I6,'     R=',E15.8,'    H=',E15.8,' REPONS=',E15.8)
      END
```

BIBLIOGRAPHIE

1 GLADWELL
A Survey of numerical methods for partial differential equations - Oxford clarendon press (1979)

2 J.L. LIONS
Méthodes d'approximation numérique de problèmes aux limites de la physique mathématique. Tom. 1,
C.N.R.S. Publication n° FG/14 : 1/B11 (1966)

3 J.L. LIONS et DUVAUT
Les inéquatiuos en mécanique et en physique (Dunod paris (1972)

4 A.R. MITCHELL
Computational methods in partial differential equations (Wiley, London (1969)

5 A.R. MITCHELL and D.F. GRIFFITHS
The finite difference method in partial differential equations - (Wiley 1980)

6 K.W. MORTON
Initial value problems by finite difference and other methods
(in the state of the art in numerical analysis proc. INIA conf. (E.D.D.A.H. Jacobs) Academic Press (1977)

7 K.W. MORTON
Stabilty of finite difference approximation to a diffusion convection equation
(international J. for num. Meth. in INGNE. Vol. 15. 677-683 (1980)

8 K.W. MORTON and R.D. RICHTMYER
Difference methods for initial value problems (Wiley New York, (1967).

9 J.L. SIEMIENICH and GLAD WELL
Analysis of explicit difference methods for a diffusion convection equation. (Int. J. num. Meth. Engng. 12. 899-916 (1978)

10 G.D. SMITH
Numerical solution of partial differential equations finite difference methods. 2nd Ed. Clarendon Press Oxford (1978)

11 H.S. PRICE, R.S. VARGA and J.E. WARREN
Application of oscillation matrices to diffusion convection equation (J. Math. Phys. 45 301-311 (1966)

12 J.P. HOLMAN
Heat transfer : Mc GRAW HILL Book Company (472)

13 C.P. BOX and G.M. JENKINS
Time analysis. Forecasting and control Holden day San francisco (1970)

14 E.P. BOX and D.A. PIERCE
Distribution of residual auto-correlations in auto regressive integrated moving average time serie models
(J. Amer. Stat. Assoc. Vol 64 (1970)

15 H. AKAIKE
A New Look at the statistical model identification (IEEE, Iran cont. Nol AC-19 (716-723 (1974))

16 KERLIN T.W., MILLER L.F., MOTT J.E., UPADHYAYA B.R. HASHCMIAN H.M. and ARENDS J.S.
(in-situ response time testing of platinum resistance thermometers (electric power research) Institud ERRI VP 459 (1977)

17 H.M. HASHCMIAN THESE (University of Tennessee 1977)

18 TEMPS DE REPONSE DES THERMOCOUPLES THERMOCOOY
(documentation SODERN - Bulletin n° 27 (1.1.74)

19 Y.S. TOULOUKIAN Serie editor
Thermal conductivity vol. 1 et 2 -
Series editor IFI/Plenum New York - Washington 1970)

20 Dreyfus fortran IV (Dunod Paris 1968)

21 Télémécanique informatique : série solar 16 Fortran (1976)